

Vorlesung Stahlbeton AK

# **Bemessen und Konstruieren von Stahlbetontragwerken mit Spannungsfeldern**

A. Muttoni  
J. Schwartz  
Prof. Dr. B. Thürlimann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Abteilung für Bauingenieurwesen  
Institut für Baustatik und Konstruktion

Sommersemester 1988





## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<b>1. EINFUEHRUNG UND THEORETISCHE GRUNDLAGEN</b>	<b>1</b>
1.1 Zielsetzung	1
1.2 Theoretische Grundlagen und Bemerkungen zur Bemessung statisch unbestimmter Tragwerke	2
1.2.1 Bemessung nach der Elastizitätstheorie	3
1.2.2 Bemessung nach der Plastizitätstheorie	4
1.2.3 Vergleich und Kritik der beiden Bemessungsmethoden mit Hilfe eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes	6
1.2.4 Vergleichsrechnung mit Hilfe eines 'realistischeren' Stoffgesetzes	10
1.2.5 Bemerkungen und Schlussfolgerungen	12
<b>2. SPANNUNGSFELDER FUER EINFACHE TRAGWERKE</b>	<b>14</b>
2.1 Einführung	14
2.2 Stege von Stahlbetonbalken	14
2.2.1 Kleine Schlankheit, konzentrierte Lasten	15
2.2.2 Kleine Schlankheit, verteilte Last	23
2.2.3 Mittlere Schlankheit, konzentrierte Lasten	24
2.2.4 Grosse Schlankheit, konzentrierte Lasten	29
2.2.5 Grosse Schlankheit, verteilte Last	37
2.2.6 Allgemeiner Fall, praktische Bemessung	40
2.3 Gurtplatten	46
2.3.1 Druckplatte	46
2.3.2 Zugplatte	48
2.4 Torsionsträger	51
2.4.1 Einführung	51
2.4.2 Wölb torsion (offener Querschnitt)	51
2.4.3 Umlauftorsion (geschlossener Querschnitt)	52
2.5 Konsolen	57
2.6 Verbindungsträger	58
2.7 Rahmenknoten	60
2.7.1 Rahmenecke; Druck innen	60
2.7.2 Rahmenecke; Zug innen	63
2.7.3 Rahmenknoten mit drei aneinanderstossenden Trägern	67
2.7.4 Rahmenknoten mit vier aneinanderstossenden Trägern	70
2.8 Wände	71
<b>3. MATERIALEIGENSCHAFTEN UND -FESTIGKEITEN</b>	<b>75</b>
3.1 Bewehrungsstahl	75
3.2 Beton	76
3.2.1 Einachsiger Spannungszustand	76
3.2.2 Mehrachsiger Spannungszustand	79
3.2.3 Beton mit aufgezwungenen Rissen	83
3.2.4 Kraftübertragung über Rissverzahnung	85
3.3 Kraftübertragung Bewehrung – Beton	87
3.3.1 Verankerung von Bewehrungsstäben	87
3.3.2 Bewehrungsstösse	89
3.3.3 Umlenkungen	90

4. ZUR ENTWICKLUNG ZWECKMAESSIGER SPANNUNGSFELDER UNTER EINBEZUG KINEMATISCHER UEBERLEGUNGEN	97
4.1 Einleitung	97
4.2 Vorgehen bei der Entwicklung von Subsystemen	97
4.3 Zwei weitere Beispiele: Kraftausbreitungen in einer Scheibe	99
4.3.1 Scheibe auf Zug beansprucht	99
4.3.2 Scheibe auf Druck beansprucht	100
4.4 Anwendungen	103
4.5 Beeinträchtigung der Tragfähigkeit durch breite Risse	105
5. SPANNUNGSFELDER FUER ALLGEMEINE ELEMENTE UND BEANSPRUCHUNGEN	107
5.1 Balken mit sprunghaften Geometrieänderungen	107
5.2 Scheiben mit Aussparungen	108
5.3 Balken mit variabler Trägerhöhe	108
5.4 Stützen, Bogen und vorgespannte Balken	109
5.5 Kombinierte Beanspruchung	110
5.6 Platten- und Schalenelemente	111
5.7 Platten mit hoher Schubbeanspruchung	112
5.8 Weitere Beispiele der räumlichen Tragwirkung	113
Literatur	114
Anhang	116

## 1. EINFUEHRUNG UND THEORETISCHE GRUNDLAGEN

---

"Es gibt nichts Praktischeres als  
eine einfache Theorie!" (R. Maillart)

### 1.1 Zielsetzung

Das Ziel einer "statischen Berechnung" (design) besteht darin, ein Tragwerk so zu entwerfen, berechnen, bemessen und konstruieren, dass es die geforderten Ansprüche hinsichtlich Tragfähigkeit, Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit erfüllt.

Ein wichtiger Teil in diesem Prozess sind die Bemessung, d.h. Festlegung der Abmessungen und der Bewehrung, und die Auslegung der konstruktiven Details, d.h. Bewehrungsanordnung, Stösse, Knoten, Auflager, usw.

Bis heute wurden zum Bemessen und Konstruieren vielfach empirische Verfahren und Regeln angewendet, die sich aus Erfahrung und Versuchen über die Zeit ergeben haben. Sie entbehren jedoch meistens einer einheitlichen theoretischen Grundlage.

In dieser Vorlesung wird die **Plastizitätstheorie** (insbesondere der **statische Grenzwertsatz**) benützt, um auf einer klaren theoretischen Basis das Bemessen und Konstruieren von Stahlbeton-Tragwerken systematisch herzuleiten.

Jede Theorie muss, um praktisch anwendbar zu sein, von vereinfachenden Voraussetzungen ausgehen, soll sie nicht zu kompliziert werden. Albert Einstein wird die Feststellung zugeschrieben:

"Eine Theorie soll so einfach wie möglich,  
jedoch nicht einfacher sein!" (A. Einstein)

Die Plastizitätstheorie ist einfach und physikalisch anschaulich. Ihre Anwendung zum Bemessen und Konstruieren führt zu klaren, anschaulichen und überblickbaren Ergebnissen. Ob sie nicht zu einfach ist, oder anders herum gesagt, ob sie praktisch brauchbare Resultate liefert, können nur systematische Versuche und im

besonderen die Erfahrung zeigen. So bestätigt sich laufend die alte Erfahrung, dass sauber konstruierte Tragwerke unvorhergesehene ausserordentliche Belastungen, z.B. Explosionen, Erdbeben, Senkungen, usw. mit mehr oder weniger grossen Schäden ertragen können, obwohl sie nach elastischen Berechnungen längst einstürzen sollten. Die dazu notwendige plastische Umlagerung der inneren Kräfte wird oft zutreffend als "Selbsthilfe" oder etwas ironisch als "Schlauheit" des Materials bezeichnet.

In den vergangenen 40 Jahren sind zuerst im Stahlbau, dann auch im Stahlbetonbau eingehende Material-, Komponenten- und Tragwerks-Versuche durchgeführt worden. Besonders wichtig für die Anwendung sind gerade die letzteren, da das Versagen sehr oft durch das Verhalten von Details, Anschlüssen und Verbindungen bestimmt wird. Alle diese Versuche haben gezeigt, dass nur die Plastizitätstheorie ein rationales, logisch konsequentes, einfaches Verfahren zur Bestimmung der statischen Tragfähigkeit und Bemessung von Stahl- und Stahlbeton-Tragwerken liefern kann.

## 1.2 Theoretische Grundlagen und Bemerkungen zur Bemessung statisch unbestimmter Tragwerke

In diesem Abschnitt werden die zwei bekanntesten Bemessungsmethoden für statisch unbestimmte Tragwerke kurz erläutert. Die auf der Elastizitätstheorie und auf der Plastizitätstheorie basierenden Methoden werden auf ein einfaches Beispiel angewendet. Die derart bemessenen Strukturen werden im Hinblick auf ihr Verhalten unter Gebrauchslasten kritisch untersucht und miteinander verglichen. Aus diesem Vergleich lassen sich interessante Schlussfolgerungen für die Bemessung von Stahlbetontragwerken ableiten.

Das zu untersuchende Tragwerk ist im Bild 1.1a dargestellt. Es besteht aus drei aufgehängten Betonzuggliedern unterschiedlicher Länge, die über einen starren Träger belastet werden. Diese Struktur ist für viele statisch unbestimmte Stahlbetontragwerke repräsentativ, wie anhand eines Vergleichs mit einem weiteren Beispiel (beidseitig eingespannter Balken, Bild 1.1b) gezeigt wird.

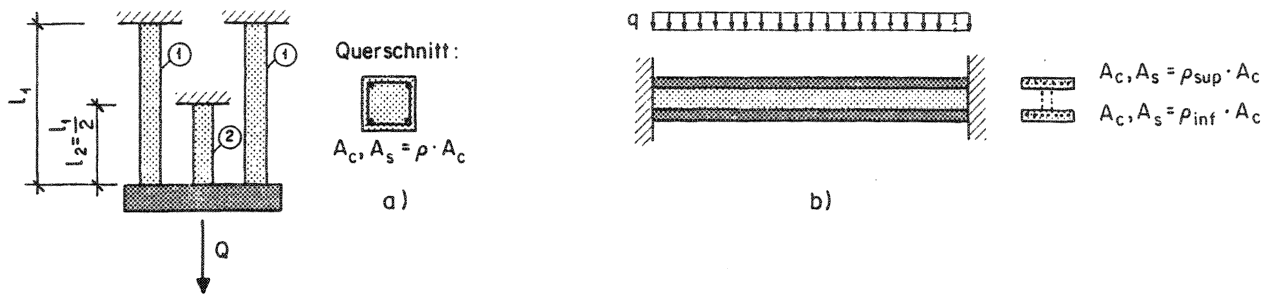


Bild 1.1: Einfach statisch unbestimmte Tragwerke

### 1.2.1 Bemessung nach der Elastizitätstheorie

Die theoretischen Grundlagen dieser Theorie werden als bekannt vorausgesetzt. Die in diesem Beispiel einzuhaltenden Bedingungen sind im Bild 1.2 zusammenfassend dargestellt.

Gleichgewichtsbedingung:	$2N_1 + N_2 = Q$
Stoffgesetz und Kinematik:	$N_1 \cdot l_1 / EA_1 = \delta = N_2 \cdot l_2 / EA_2$
Fließbedingung: oder	$\gamma \cdot N \leq N_R = A_s \cdot f_{sy} = \rho \cdot A_c \cdot f_{sy}$
Materialausnützungskriterium:	$N \leq N_{zul} = A_s \cdot \sigma_{zul} = \rho \cdot A_c \cdot \sigma_{zul}$

Es bedeuten:

- $N_1, N_2$  = Normalkräfte in den Stäben
- $EA_1, EA_2$  = Steifigkeiten der Stäbe
- $\delta$  = Durchbiegung
- $\gamma$  = Sicherheitsfaktor
- $f_{sy}$  = Streckgrenze des Stahls
- $\sigma_{zul}$  = zulässige Spannung
- $A_s$  = Bewehrungsfläche
- $\rho$  = geometrischer Bewehrungsgehalt

Bild 1.2: Bedingungen für die Bemessung nach der Elastizitätstheorie

Für die Berechnung der Steifigkeit wird üblicherweise angenommen, dass sich die Stäbe im ungerissenen Zustand befinden. Da die Bewehrungsgehalte keinen grossen Einfluss auf die Steifigkeit haben, resultiert mit  $EA_1 = EA_2$ :

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{N_2}{2}$$

Die erforderliche Bewehrung ergibt sich aus der Einhaltung der Fließbedingung (im Bruchzustand mit  $f_{sy}$  oder im Gebrauchszustand mit  $\sigma_{zul}$ ). In diesem Fall ist der Bewehrungsgehalt im kurzen Stab doppelt so gross wie im langen Stab (Bild 1.3). Es ist zu beachten, dass in diesem Beispiel die Zugfestigkeit vernachlässigt worden ist, was im Widerspruch zur Annahme betreffend die Steifigkeitsberechnung ist.

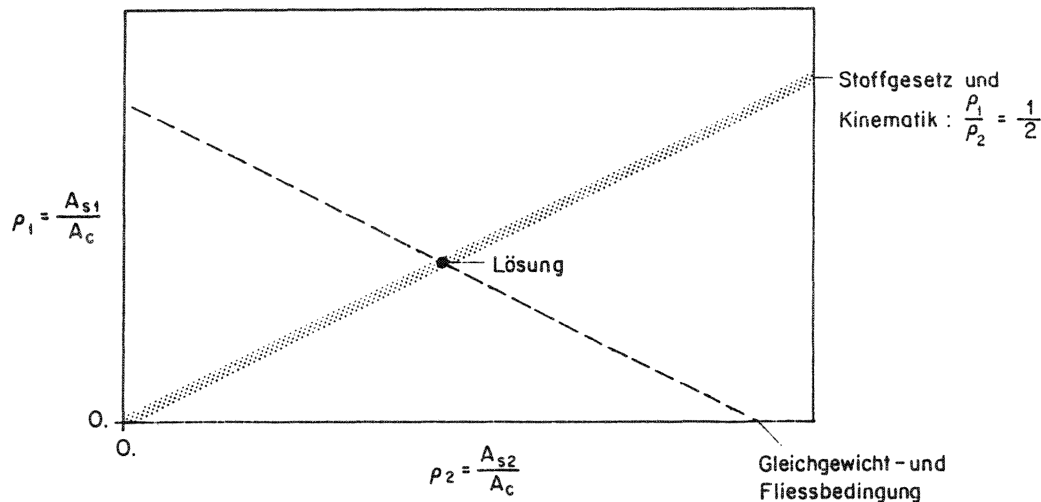


Bild 1.3: Bewehrungsgehalte für beide Stäbe

### 1.2.2 Bemessung nach der Plastizitätstheorie

Die Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie werden hier nur kurz erwähnt. Für eine ausführliche Behandlung der theoretischen Grundlagen sei auf [1] verwiesen.

#### Statischer Grenzwertsatz (unterer Grenzwert)

Eine Belastung  $[Q_S]$ , die zu einem Spannungsfeld gehört, das

- die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllt,
- die Fließbedingungen nicht verletzt,

ist ein unterer Grenzwert der Traglast  $[Q_R]$

$$[Q_S] \leq [Q_R]$$

### Kinematischer Grenzwertsatz (oberer Grenzwert)

Eine Belastung  $[Q_K]$ , die mit einem Mechanismus, welcher

- die geometrischen Randbedingungen erfüllt,
- in den plastischen Zonen das Fliessgesetz erfüllt,

ein globales Gleichgewichtssystem bildet, ist ein oberer Grenzwert der Traglast  $[Q_R]$

$$[Q_K] \geq [Q_R]$$

Im Bild 1.4 sind die Bedingungen für beide Grenzwertsätze tabellarisch zusammengestellt.

	statischer Grenzwertsatz $[Q_S] \leq [Q_R]$	kinematischer Grenzwertsatz $[Q_K] \geq [Q_R]$	vollständige Lösung $[Q] = [Q_R]$
Gleichgewichtsbedingung	erfüllt	erfüllt	erfüllt
Fliessbedingung	erfüllt	?	erfüllt
Mechanismus	?	erfüllt	erfüllt

Bild 1.4

Eine Lösung, die sämtliche Bedingungen erfüllt, wird als vollständige Lösung des Problems bezeichnet.

Für die Bemessung wird üblicherweise die statische Methode der Plastizitätstheorie (Anwendung des statischen Grenzwertsatzes) angewendet.

Die einzuhaltenden Bedingungen für das im Bild 1.1 dargestellte Tragwerk sind im Bild 1.5 zusammengefasst.

Gleichgewichtsbedingung:	$2N_1 + N_2 = Q$
Stoffgesetz und Kinematik:	$0 \leq \frac{N_1}{N_2} \leq \infty$
Flie遥edingung:	$\sigma \cdot N \leq N_R = A_s \cdot f_{sy} = \rho \cdot A_c \cdot f_{sy}$

Bild 1.5: Bedingungen für die Bemessung nach der Plastizitätstheorie

Bei der Bemessung nach der Plastizitätstheorie ergibt sich aus Stoffgesetz und Kinematik keine Abhängigkeit zwischen den beiden Bewehrungsgehalten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Die Lösung ist somit nicht eindeutig definiert (Bild 1.6).

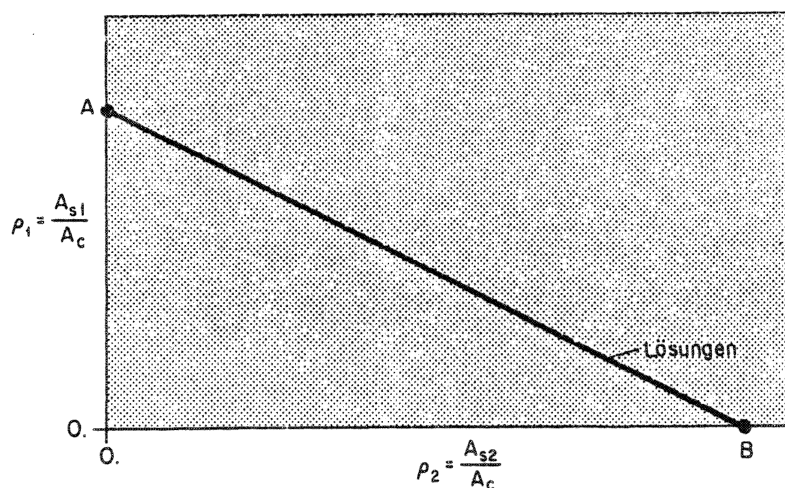


Bild 1.6: Bewehrungsgehalte der beiden Stäbe

Alle Gleichgewichtslösungen zwischen A (nur die langen Stäbe sind bewehrt) und B (nur der kurze Stab ist bewehrt) sind somit zulässig.



### 1.2.3 Vergleich und Kritik der beiden Bemessungsmethoden mit Hilfe eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes

In diesem Abschnitt wird die Annahme getroffen, dass der Beton keine Zugkraft aufnimmt. Im Bild 1.7 sind die Last-Verformungs-Beziehungen der Stäbe dargestellt.

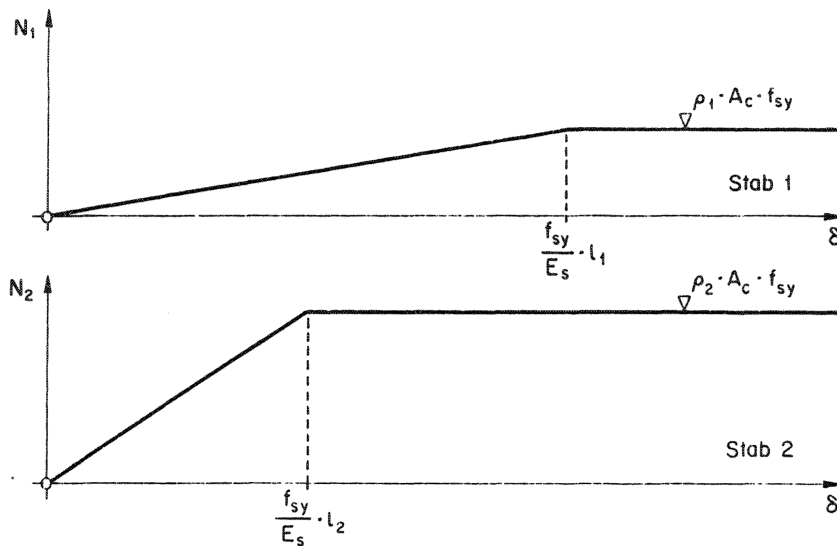


Bild 1.7: Last-Verformungs-Beziehungen der Stäbe

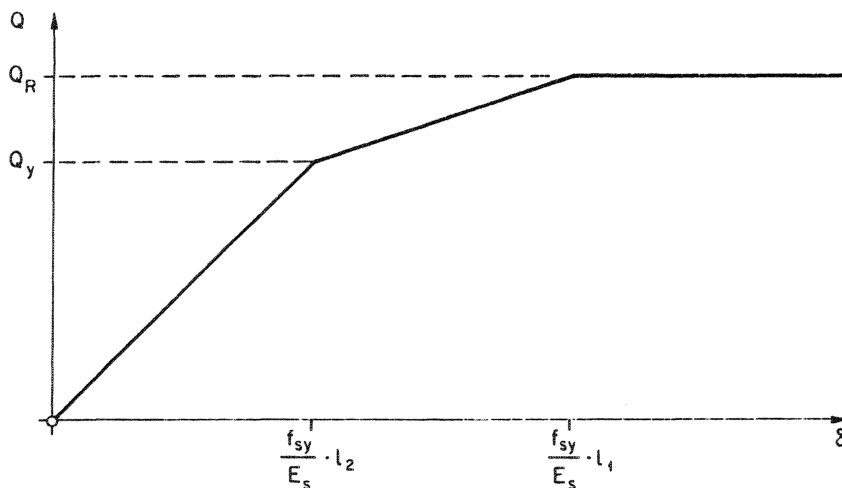


Bild 1.8: Last-Verformungs-Beziehung des elastisch bemessenen Tragwerks

Das Last-Verformungs-Diagramm für das Tragwerk ergibt sich aus der Addition der Charakteristiken der drei Stäbe. Bild 1.8 zeigt diese Beziehung für ein Tragwerk mit  $\rho_1/\rho_2 = 1/2$  (elastische Bemessung). Es ist zu beachten, dass nicht alle Stäbe gleichzeitig die Fließgrenze erreichen. Da die Dehnung im kurzen Stab doppelt so gross ist wie diejenige in den langen Stäben, ist beim Erreichen der Fließlast  $Q_y$  die Kraft in den langen Stäben nur halb so gross wie die entsprechende Stabfließkraft. Dies ist im Widerspruch mit dem Grundsatz der elastischen Bemessung, wonach die Spannung aller Stäbe  $\sigma_{zu1}$  oder  $f_{sy}$  ist. Die Traglast  $Q_R$  wird erst erreicht, wenn alle Stäbe fließen.

Im Bild 1.9 sind Last-Verformungs-Kurven mit gleicher zugehöriger Traglast für verschiedene bei der plastischen Bemessung gewählte Verhältnisse  $\rho_1/\rho_2$  aufgezeichnet.

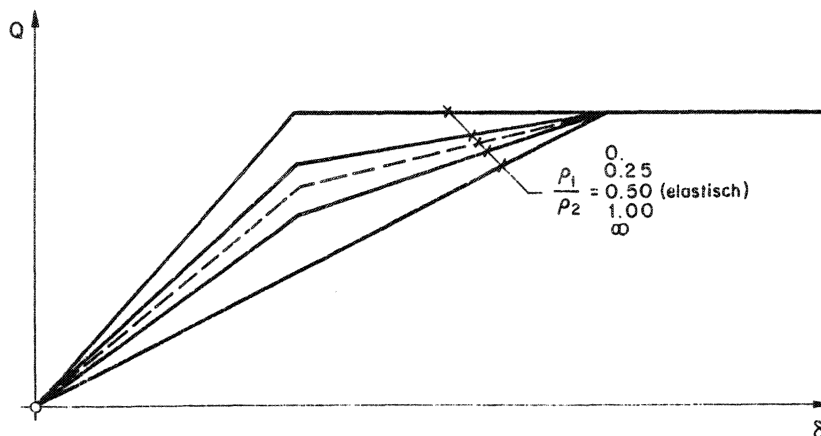


Bild 1.9: Last-Verformungs-Beziehungen des plastisch bemessenen Tragwerks

Für  $\rho_1/\rho_2 < 0.5$  fließt die Bewehrung des kurzen Stabes bei einer Last, die grösser ist als 75% der Traglast. Für  $\rho_1/\rho_2 > 0.5$  hingegen ist  $Q_y$  kleiner als  $0.75 \cdot Q_R$ . Die Grösse  $Q_y/Q_R$  ist als Funktion der Bemessungsgrössen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  im Bild 1.10 dargestellt.

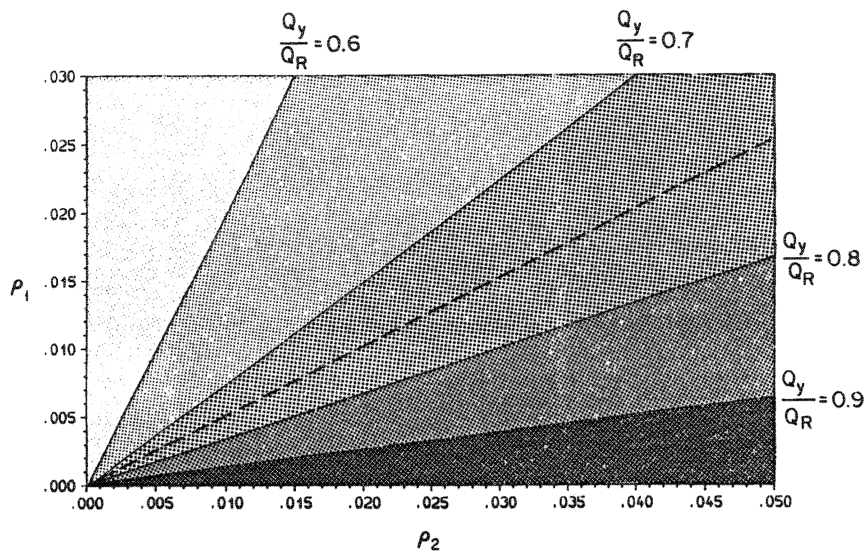


Bild 1.10: Einfluss der Bemessungsgrößen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  auf  $Q_y/Q_R$

Es ist ersichtlich, dass das Verhältnis  $\rho_1/\rho_2$  einen grossen Einfluss auf  $Q_y/Q_R$  hat. Es ist zu beachten, dass sich sehr breite Risse vor allem dann ausbilden, wenn die Fließgrenze der Bewehrung erreicht wird. Da die Traglast  $Q_R$  unabhängig von der Berechnungsmethode (Elastizitätstheorie oder Plastizitätstheorie) ist, wird die Grösse  $Q_y/Q_R$  zu einem wichtigen Beurteilungsfaktor für das Verhalten des Tragwerks im Gebrauchszustand. Damit nicht bereits unter Gebrauchslasten die Fließgrenze der Bewehrung erreicht wird, muss folgende Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{Q_y}{Q_R} > \frac{1}{\gamma} \quad (\gamma = \text{globaler Sicherheitsfaktor})$$

Aus den Bildern 1.9 und 1.10 ist ersichtlich, dass sich plastisch bemessene Tragwerke im Gebrauchszustand besser oder schlechter verhalten können als elastisch bemessene.

Zu beachten ist, dass Eigenspannungszustände die Fließlast  $Q_y$  im Gegensatz zur Traglast  $Q_R$  beeinflussen. Dies ist im Bild 1.11 qualitativ dargestellt.

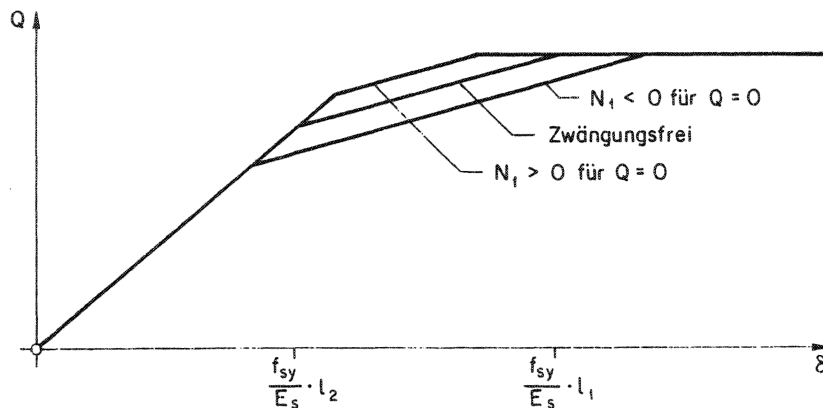


Bild 1.11: Einfluss von Zwängungen auf die Last-Verformungs-Beziehung

#### 1.2.4 Vergleichsrechnung mit Hilfe eines 'realistischeren' Stoffgesetzes

Das Stoffgesetz des vorangehenden Abschnittes wird verfeinert, indem die Wirkung der Betonzugfestigkeit berücksichtigt wird. Bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit werden die Stäbe als ungerissen betrachtet. Im gerissenen Zustand hingegen wird mit einem empirischen Stoffgesetz gerechnet, um die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen auf Zug zu berücksichtigen (tension stiffening). Vereinfachend wird für die Beschreibung dieses Zustandes eine Hyperbel 1. Ordnung nach [2] gewählt. Dieser Verlauf ist im Bild 1.12 dargestellt. Die gestrichelte Gerade entspricht dem elastisch-plastischen Stoffgesetz nach Bild 1.7.

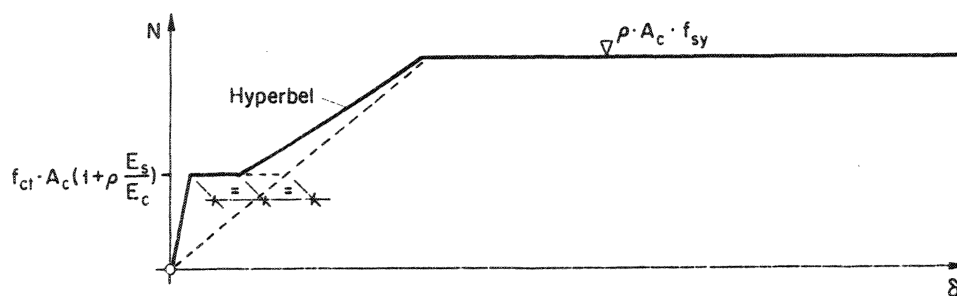


Bild 1.12: Last-Verformungs-Beziehung der Stäbe

Das Last-Verformungs-Diagramm für das Tragwerk ergibt sich aus der Addition der Charakteristiken der einzelnen Stäbe. Im Bild 1.13 ist dieser Verlauf für drei Bewehrungsverhältnisse dargestellt.

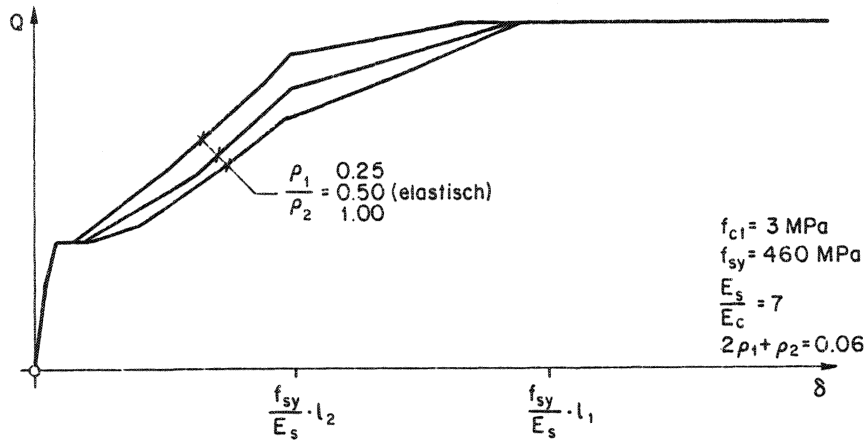


Bild 1.13: Last-Verformungs-Beziehung des Tragwerks

Aus diesem Bild ist ersichtlich, dass auch hier der kurze Stab (Last  $Q_y$ ) vor dem Erreichen der Traglast (Last  $Q_R$ ) fließt.

Das Verhältnis  $Q_y/Q_R$  als Funktion von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  ist im Bild 1.14 dargestellt.

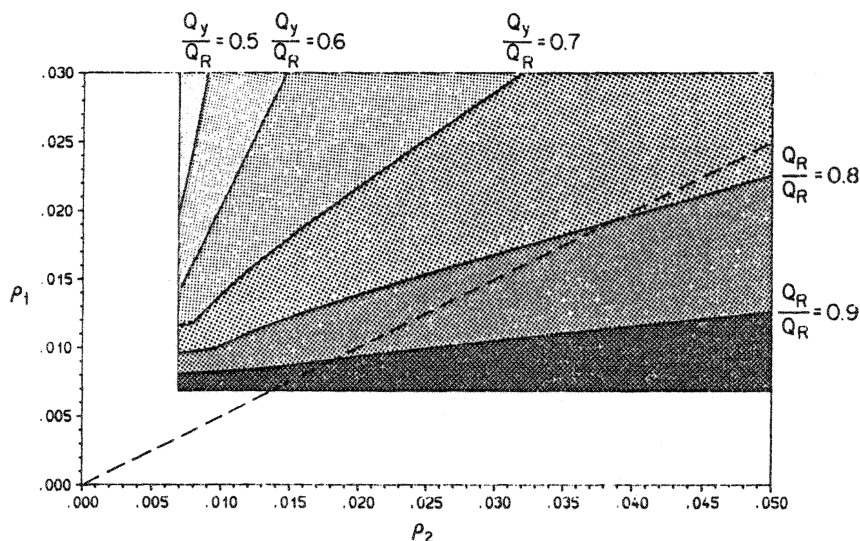


Bild 1.14: Einfluss der Bemessungsgrößen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  auf das Verhältnis  $Q_y/Q_R$  (Tragwerk gemäss Bild 1.1a)

Dass das untersuchte Beispiel für statisch unbestimmte Tragwerke repräsentativ ist, zeigt auch ein Vergleich mit einem andersartigen Tragwerk. Bild 1.15 zeigt den Einfluss von  $\rho_{\text{inf}}$  und  $\rho_{\text{sup}}$  auf  $Q_y/Q_R$  für das im Bild 1.1b dargestellte Tragwerk.

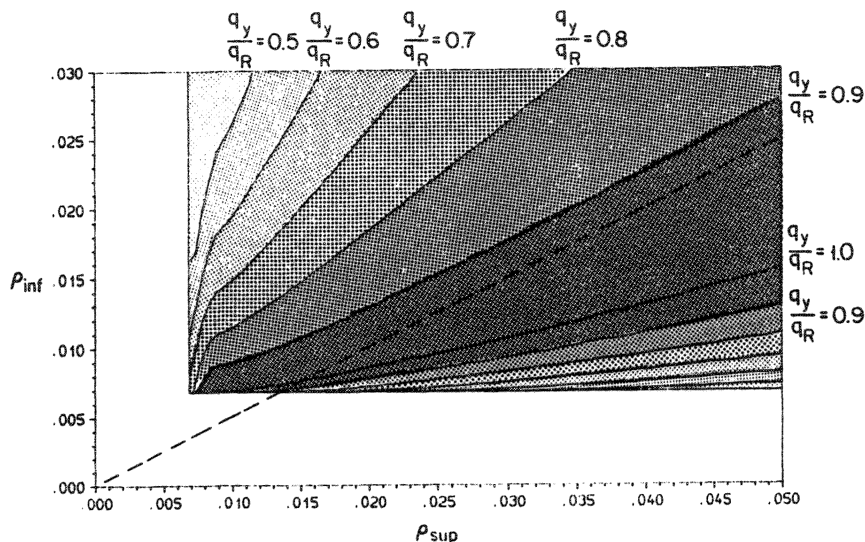


Bild 1.15: Einfluss von  $\rho_{\text{inf}}$  und  $\rho_{\text{sup}}$  auf  $q_y/q_R$

### 1.2.5 Bemerkungen und Schlussfolgerungen

Der Entwurf des Tragsystems und die Festlegung der Betonabmessungen haben einen grossen Einfluss auf das Verhalten der Tragstruktur im Gebrauchszustand. Lokale Verformungen (Rissweiten) sind auch von der Führung, der Stärke und der Aufteilung der Bewehrung in dünne oder dicke Stäbe abhängig. Breite Risse entstehen vor allem, wenn die Bewehrung die Fließgrenze erreicht hat. Um dort unzulässige Rissbreiten zu vermeiden, wo die rechnerischen inneren Beanspruchungen gering und somit auch die daraus resultierenden Bewehrungen klein sind, ist eine minimale Bewehrung anzuordnen. Dieser Sachverhalt wird im Kapitel 4 ausführlich untersucht.

Wie in den vorangehenden Abschnitten gezeigt worden ist, fließt die Bewehrung im allgemeinen bei statisch unbestimmten Systemen bevor die Traglast erreicht wird. Bei den zwei untersuchten Beispielen wird im Fall einer Bemessung nach der Elastizitätstheorie die Fließlast zwischen 75% und 100% der Traglast erreicht (ohne Berücksichtigung der Zwängungen). Damit ist die Gefahr des Fließens des Bewehrungsstahls im Gebrauchszustand praktisch ausgeschlossen. Bei nach der

Plastizitätstheorie bemessenen Tragwerken kann dieser Zustand hingegen bei tieferen oder auch höheren Lasten erreicht werden. Damit Lösungen mit einem unbefriedigenden Verhalten im Gebrauchszustand ausgeschlossen werden können, muss bei der Aufteilung der Widerstände folgendes Prinzip eingehalten werden:

"Je grösser die Dehnung (spezifische Verformung) eines Elementes, desto stärker ist seine Bewehrung."

Bei den untersuchten Beispielen resultiert mit  $\rho_2 > \rho_1$  ein Verhältnis  $Q_y/Q_R$  von  $> 0.7$  und mit  $\rho_{sup} > \rho_{inf}$  ein Verhältnis  $q_y/q_R$  von  $> 0.75$ .

Bekanntlich sind bei der Bemessung die Tragsicherheit sowie die Gebrauchstauglichkeit zu berücksichtigen.

Die Tragsicherheit kann mit Hilfe der Plastizitätstheorie mit genügender Genauigkeit nachgewiesen werden.

Ein Nachweis der Gebrauchstauglichkeit, die ohnehin von vielen unbekannten Faktoren beeinflusst wird (z.B. Zwängungen), erübrigt sich durch einfache qualitative Überlegungen bei der Bemessung.

## 2. SPANNUNGSFELDER FUER EINFACHE TRAGWERKE

---

### 2.1 Einführung

In diesem Kapitel wird die Tragwirkung einfacher Tragwerkselemente aus Stahl- oder Spannbeton mit Spannungsfeldern untersucht. Behandelt werden Stege und Gurtplatten von Balken, einfache Wände, Konsolen, Verbindungsträger und Rahmenknoten. Damit ist bereits die Mehrzahl der Bemessungsfälle abgedeckt. Im Kapitel 5 werden diese Fälle durch anspruchsvollere Element- und Beanspruchungsarten ergänzt.

Alle Tragwerkselemente sind dreidimensionale Körper. Die in diesem Kapitel untersuchten Elemente werden entweder direkt als Scheiben behandelt (keine Variation der Spannungen über die Elementdicke) oder in einzelne Scheiben zerlegt. Da zweidimensionale Tragwerkselemente innerlich hochgradig statisch unbestimmt sind, lassen sich für einen gegebenen Lastfall mehrere (eigentlich unendlich viele) Tragwirkungen angeben. Wird die statische Methode der Plastizitätstheorie angewendet, so dürfen eine Tragwirkung (beschrieben mit einem Spannungsfeld) gewählt oder mehrere Tragwirkungen frei kombiniert werden. Im Kapitel 1 wurde anhand von Beispielen gezeigt, dass diese Methode zur Bemessung von Stahlbetontragwerken geeignet ist. Die Auswirkung der Wahl des definitiven Tragsystems auf das Verhalten des Tragsystems wird im Kapitel 4 ausführlich untersucht.

Die ersten Anwendungen dieser Bemessungsmethode gehen auf Ritter [3] und Mörsch [4] zurück, die schon Anfang des Jahrhunderts die Resultierenden der inneren Beanspruchungen (Fachwerkmodelle) untersuchten. Die ersten Spannungsfelder nach den Grundlagen der Plastizitätstheorie wurden erst Anfang der sechziger Jahre von Drucker [5] entwickelt. Eine gute Zusammenstellung der Weiterentwicklung dieser Methode ist in den Publikationen von Thürlimann et al. [6], [7], Nielsen [8] und Chen [9] enthalten. Eine verwandte Anwendung der Methode, beeinflusst durch die Elastizitätstheorie, wurde von Schlaich et al. [10] vorgeschlagen.



## 2.2 Stege von Stahlbetonbalken

Obwohl die Tragwirkung dieser Tragwerkselemente leicht verständlich oder mindestens qualitativ bereits bekannt ist, wird das Schwergewicht auf das Entwickeln der Spannungsfelder gelegt, es werden nicht nur fertige Lösungen dargestellt. Damit wird der Einstieg in das Arbeiten mit Spannungsfeldern erleichtert.

Zuerst wird an einem gedrunenen, einfach gelagerten Balken unter zwei Einzellasten die Tragwirkung (Verlauf der inneren Kräfte) aufgezeigt und mit einem Spannungsfeld beschrieben. Anschliessend werden schrittweise die Last verteilt und die Schlankheit vergrössert. Es resultieren somit die Spannungsfelder für einfache Balken mit verschiedenen Schlankheiten.

### 2.2.1 Kleine Schlankheit, konzentrierte Lasten

Gegeben sei ein Stahlbetonträger mit Rechteckquerschnitt, dessen Abmessungen und Belastung (auf dem "Bruchniveau") im Bild 2.1 angegeben sind.

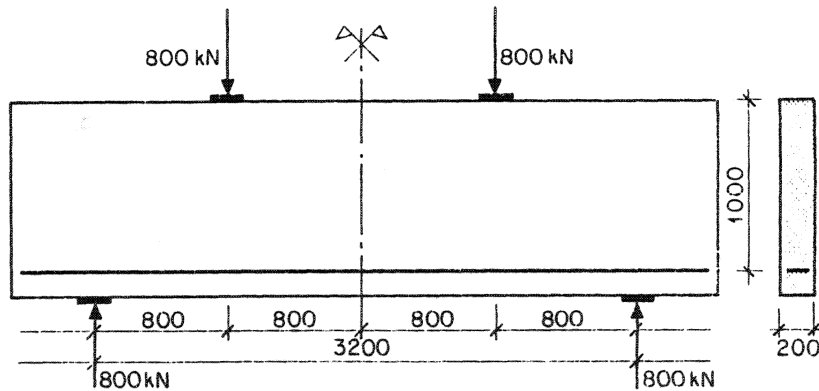


Bild 2.1: Stahlbetonträger mit Abmessungen und Belastung

Die Materialfestigkeiten sind:

- effektive Betonfestigkeit  $f_{ce} = 20 \text{ MPa}$
- Fließgrenze des schlaffen Bewehrungsstahls  $f_{sy} = 460 \text{ MPa}$

Die effektive Betonfestigkeit ist diejenige Festigkeit, mit welcher im Tragwerk zu rechnen ist. Für genauere Angaben wird auf Kapitel 3 verwiesen.

Der Verlauf der inneren Kräfte kann sofort aus intuitiven Ueberlegungen ermittelt werden. Der Abstand der Last vom Auflager ist so klein, dass diese sich direkt gegen das Auflager abstützen kann. Zwischen der Last und der Auflagerkraft bildet sich somit eine auf Druck beanspruchte Betonstrebe aus. Bild 2.2 zeigt die Lage der Resultierenden dieser Betonstrebe sowie der übrigen Druck- und Zugkräfte, die zur Erzeugung des Gleichgewichtes erforderlich sind.

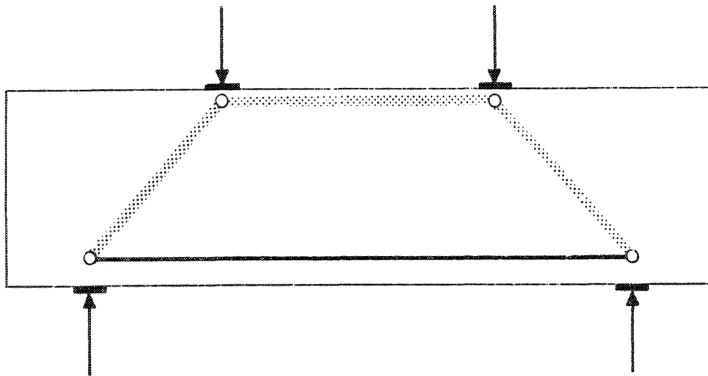


Bild 2.2: Direkte Abstützung: Resultierende der inneren Kräfte

Die horizontale Zugkraft wird von einer Bewehrung aufgenommen. Die horizontale Druckkraft wird vom Beton übernommen.

Statisch äquivalent mit der horizontalen Druckkraft ist ein einachsiges Spannungsfeld (Druckgurt) mit konstanter Intensität  $f_{ce}$ . Im Bild 2.3a ist dieses Spannungsfeld für einen angenommenen Hebelarm dargestellt.

Da zwischen dem Druckgurt und der Balkenoberfläche ein spannungsloser Bereich resultiert, kann der Hebelarm vergrößert werden. Die optimale Lage des Druckgurtes kann somit iterativ bestimmt werden. Bild 2.3b zeigt das Spannungsfeld nach der ersten Iteration, das als Lösung beibehalten werden kann. Der mittlere Bereich des Balkens ist rein auf Biegung beansprucht. Die iterativ bestimmten Abmessungen und Kräfte hätten somit auch analytisch mit den bekannten Methoden ermittelt werden können.

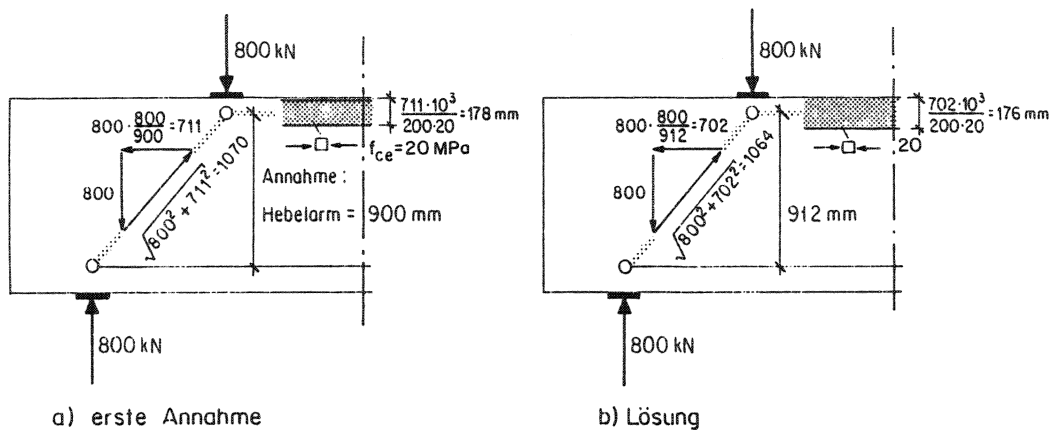


Bild 2.3: Entwicklung des horizontalen Druckgurtes

Die dargestellte Lösung mit konstanter Spannungsintensität im Druckgurt ist nur eine der möglichen Lösungen nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie. Am inneren Rand der Strebe ist eine Diskontinuität des Spannungszustandes vorhanden. An der Begrenzungslinie (Diskontinuitätslinie) fällt die Spannungsintensität abrupt von  $f_{ce}$  auf null ab (Bild 2.4a).

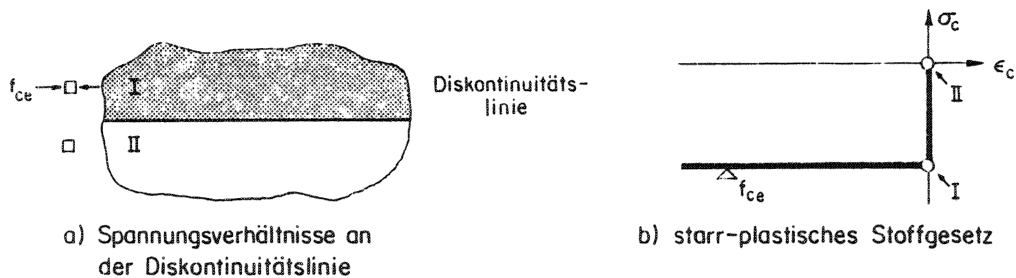


Bild 2.4: Diskontinuitätslinie

Eine solche Diskontinuität ist nur unter der Annahme eines starr-plastischen Stoffgesetzes zulässig (Bild 2.4b). Lösungen ohne Spannungsdiskontinuität sind aber auch möglich (Bild 2.5).

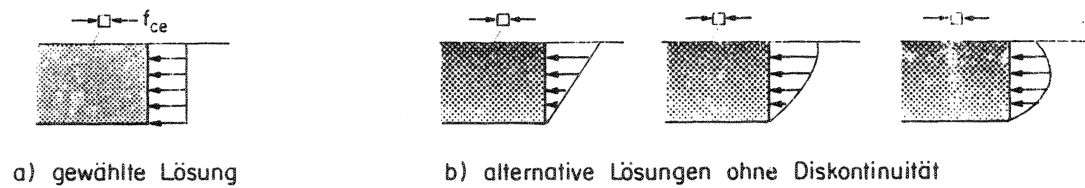


Bild 2.5: Mögliche Spannungsverteilungen im Druckgurt

Für übliche Bewehrungsgehalte hat die Wahl der Spannungsverteilung keinen grossen Einfluss auf die Lage der Resultierenden. Es ist deshalb sinnvoll, eine möglichst einfache Spannungsverteilung zu wählen.

Eine Druckstrebe mit konstanter Intensität kann auch zur Beschreibung des Spannungszustandes zwischen Last und Auflagerkraft verwendet werden. Die Strebenbreite resultiert aus der Division der Strebenkraft durch effektive Betonfestigkeit und Scheibendicke (Bild 2.6). Zur Bestimmung der Krafteinleitungsbreite wird die Betonbeanspruchung unterhalb der Lasten und Auflagerkräfte gleich  $f_{ce}$  gesetzt.

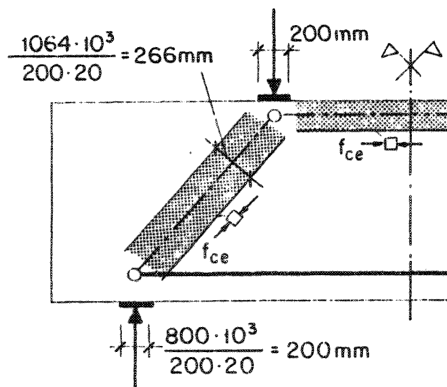


Bild 2.6: Druckstrebe und Druckgurt

Die Entwicklung des Spannungsfeldes in diesem Knotenbereich ist im Bild 2.7 dargestellt. Im Knotenbereich resultiert somit ein zweiachsiger Spannungszustand mit den Intensitäten der beiden Hauptspannungen gleich  $f_{ce}$ .

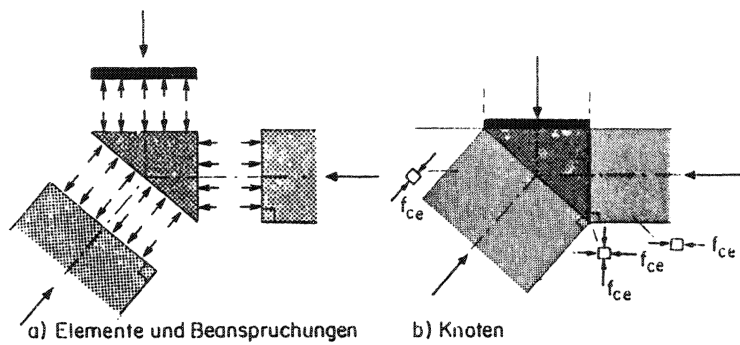


Bild 2.7: Entwicklung des Knotenbereichs

Es ist zu bemerken, dass die Diskontinuitätslinie zwischen Strebe und Knotenbereich immer senkrecht zur Strebe steht, wenn im zweiachsig beanspruchten Bereich ein isotroper Spannungszustand ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) herrscht.

Der Knotenbereich über der Auflagerkraft lässt sich analog konstruieren (Bild 2.8a).

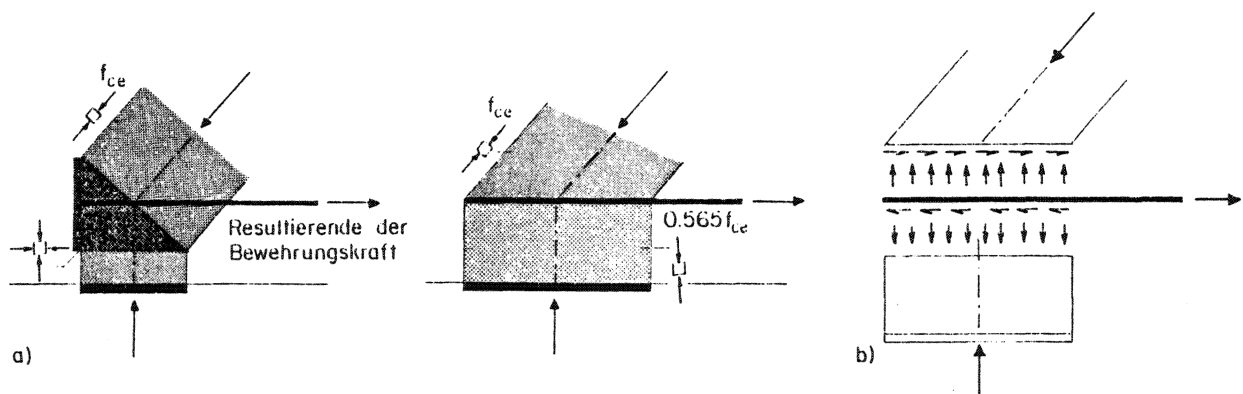


Bild 2.8: Knotenbereich

Der Spannungszustand im zweiachsig beanspruchten Bereich ist im Gleichgewicht mit der diagonalen Druckstrebenkraft, mit der Auflagerkraft und mit der Kraft der Bewehrung. Sowohl die Bewehrungs- als auch die Auflagerkraft wirken konstant verteilt über die zugehörigen Diskontinuitätslinien.

Es ist zu beachten, dass nach diesem Spannungsfeld die Bewehrungskraft bis zum linken Rand des Auflagers voll wirksam sein muss. Eine alternative Lösung ist im Bild 2.8b dargestellt; die Bewehrungskraft im Auflagerbereich wird kontinuierlich abgebaut. Das Spannungsfeld ist nur zulässig, wenn die Bewehrungskraft

innerhalb des Knotenbereichs in den Beton übertragen werden kann. Es ist ersichtlich, dass die Aufstandsfläche der Auflagerkraft grösser wird, und dass dementsprechend die Spannung im vertikalen Druckfeld kleiner wird.

Die Spannungsfelder des gesamten Trägers sind für beide Varianten im Bild 2.9 dargestellt.

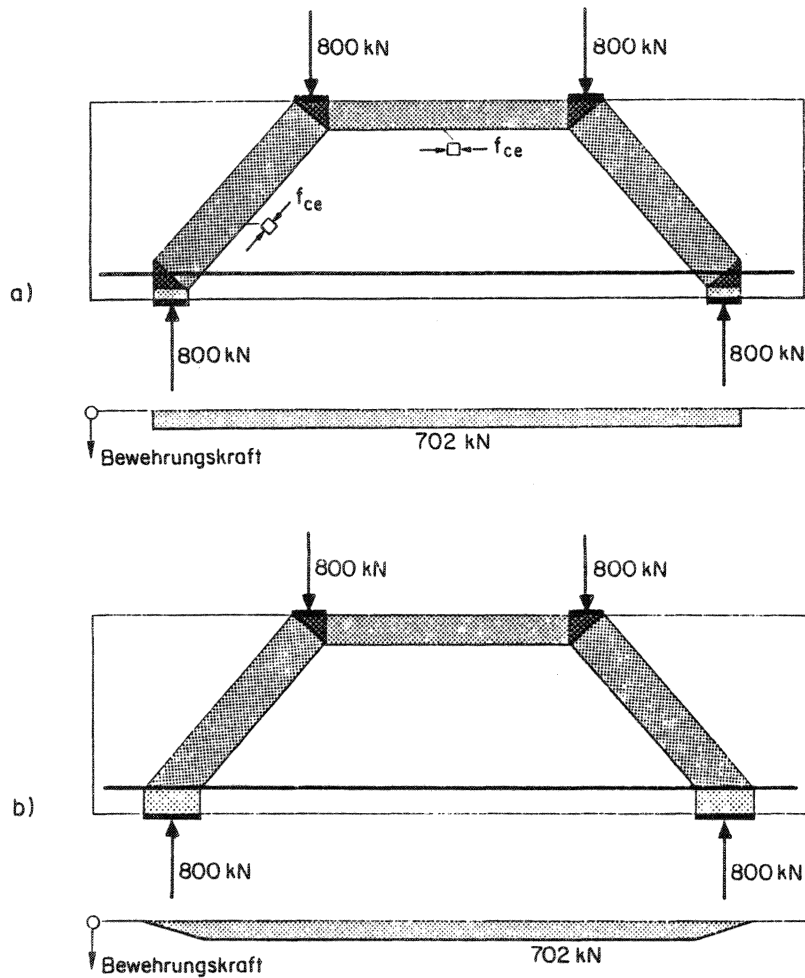


Bild 2.9: Spannungsfelder und Verlauf der Bewehrungskraft

Im Bild 2.10a ist eine mögliche Bewehrungsanordnung dargestellt, bei welcher die ganze Bewehrungskraft hinter dem Auflager verankert wird. Die Bilder 2.10 b) bis d) zeigen Lösungen, bei welchen die Verankerung der Bewehrung mit Hilfe von Steckbügeln, Schlaufen oder Ankerplatten direkt neben dem Auflager erfolgt.

Längsbewehrung: Kraft = 702 kN, Fläche =  $\frac{702 \cdot 10^3}{460} = 1526 \text{ mm}^2 \rightarrow 5 \phi 20$  oder  $8 \phi 16$

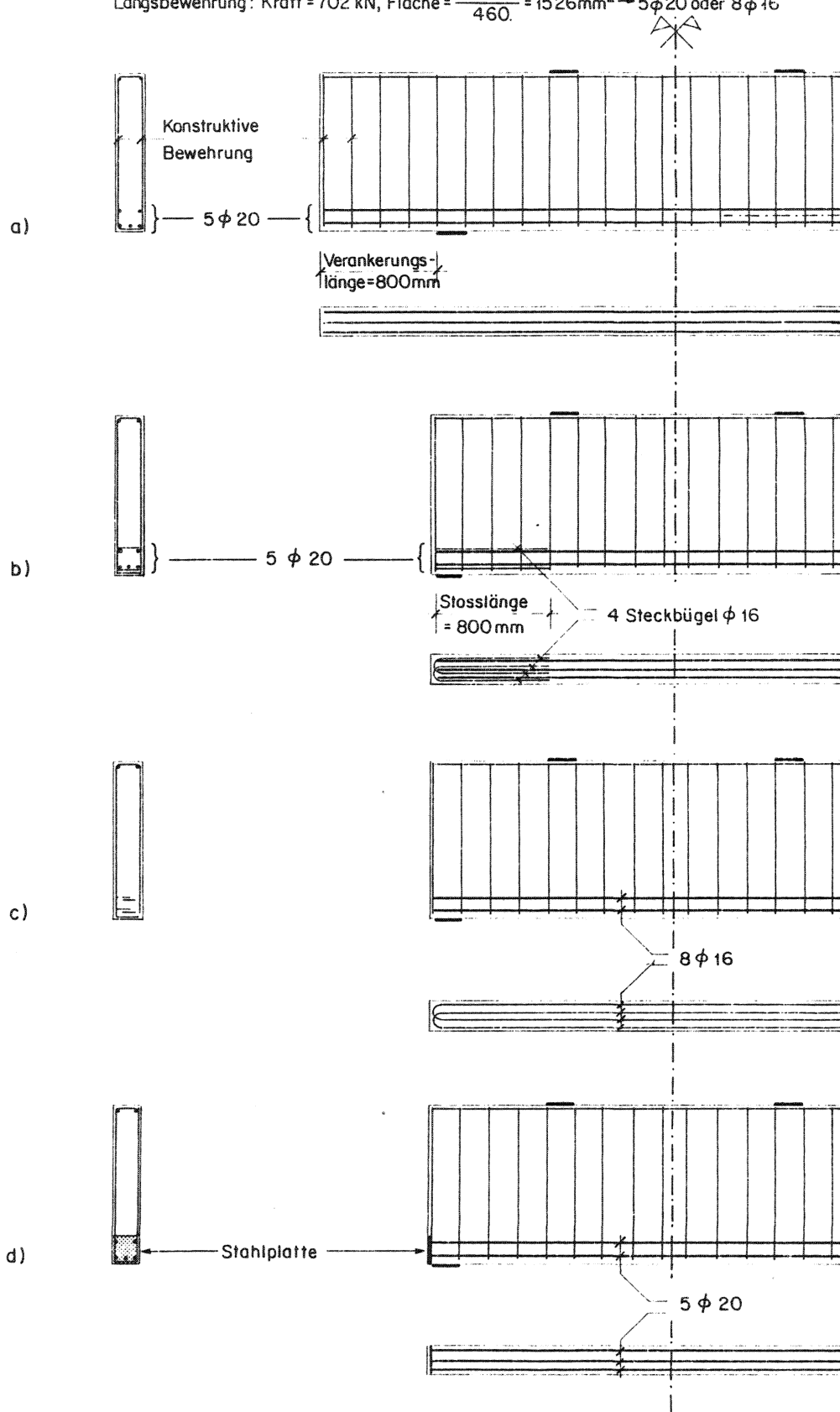


Bild 2.10: Bewehrungsskizzen

Zusammenfassend können die Resultate wie folgt beschrieben werden:

- Obwohl der Balken stark auf Schub beansprucht ist, sind statisch keine Bügel erforderlich.
- Der Verlauf der Bewehrungskraft entspricht nicht dem Momentenverlauf. Die Bewehrungskraft ist hingegen über die Balkenlänge konstant, so dass im Auflagerbereich die volle Kraft verankert werden muss.

Zur praktischen Bemessung von Stahlbetonkonstruktionen lässt sich schon aus diesem Beispiel folgendes erkennen: Das Spannungsfeld muss nicht in allen Elementen quantitativ entwickelt werden. Durch einen qualitativen Entwurf des Spannungsfeldes ist der Verlauf der inneren Kräfte für eine effiziente Bemessung bereits genügend gut bekannt, d.h. für eine Festlegung der Bewehrungsführung und der Bewehrungsquerschnitte, für die konstruktive Ausbildung der Details sowie für den Nachweis der Betonspannungen in den massgebenden Bereichen.

### 2.2.2 Kleine Schlankheit, mehrere konzentrierte Lasten

Betrachtet wird der Stahlbetonträger des vorangehenden Beispiels. Die Last von 800 kN (Bruchniveau) wird in vier gleich grosse Lasten mit gleicher Resultierenden aufgeteilt. Da die Resultierende der Lasten unverändert geblieben ist, bleiben auch die Abmessung des Druckgurtes in Feldmitte und die Bewehrungskraft gleich wie im vorangehenden Beispiel (Bild 2.11).

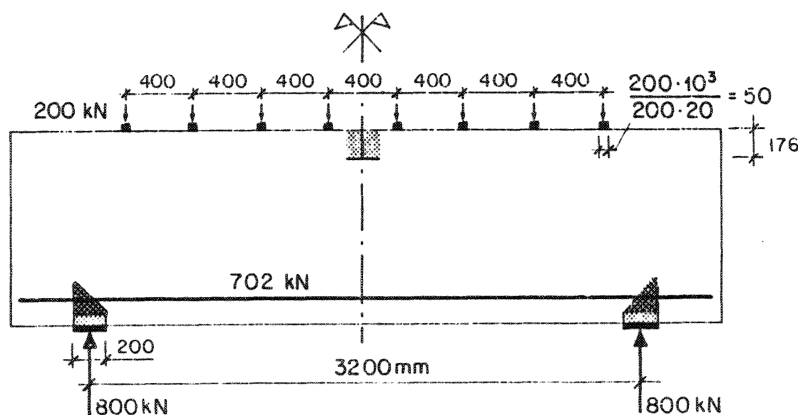


Bild 2.11: Träger und Belastung





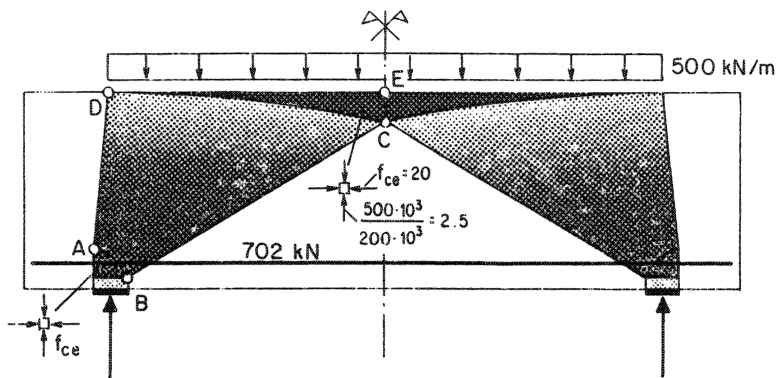


Bild 2.13: Spannungsfeld

Das Spannungsfeld ABCD wird als Fächer bezeichnet. Die Intensität der Spannung beträgt  $f_{ce}$  an der Diskontinuitätslinie AB und nimmt in radialer Richtung hyperbolisch ab. Im Bereich CDE herrscht ein zweiachsiger Spannungszustand. Es kann gezeigt werden, dass die Diskontinuitätslinien AB und CD Parabeln 2. Ordnung sind. Der Verlauf dieser Kurven ist jedoch ohne Bedeutung für die praktische Bemessung.

#### 2.2.4 Mittlere Schlankheit, konzentrierte Lasten

Betrachtet wird ein Träger mit gleichem Querschnitt wie in den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.3, jedoch mit einer verdoppelten Spannweite. Die Lasten betragen unverändert 800 kN (Bruchniveau) und wirken in den beiden Viertelpunkten des gegebenen Trägers. Das im Abschnitt 2.2.1 entwickelte Spannungsfeld kann auch für diesen Fall qualitativ übernommen werden (Bild 2.14).

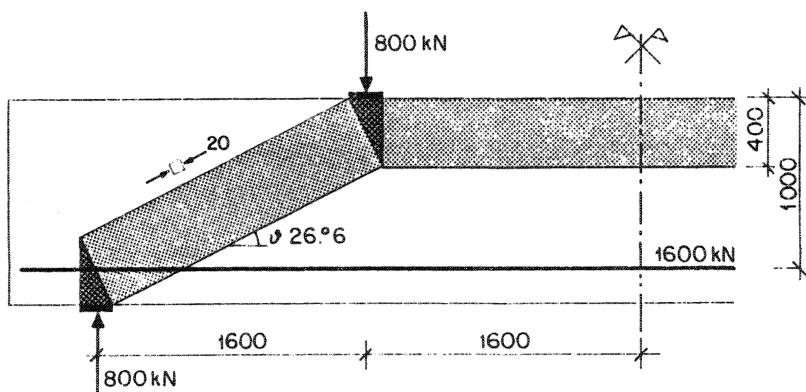


Bild 2.14: Spannungsfeld (direkte Abstützung)

Die Breite der horizontalen Druckstrebe beträgt 400 mm und die Neigung der diagonalen Druckstrebe ergibt sich zu  $26.6^\circ$ .

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass sich dieses Spannungsfeld nur bedingt einstellen kann. In den Kapiteln 3 und 4 wird gezeigt, dass die Kraftübertragung im Beton u.a. dann problematisch ist, wenn sich eine unbewehrte Druckstrebe über eine längere Strecke in der Nähe einer auf Zug beanspruchten Bewehrung befindet, d.h. in diesem Fall bei kleinen Neigungen der Druckstrebe.

Gesucht sind somit alternative Lösungen mit steileren Druckstreben. Im Bild 2.15 wird das Problem mit der Kombination zweier Tragsysteme gelöst.

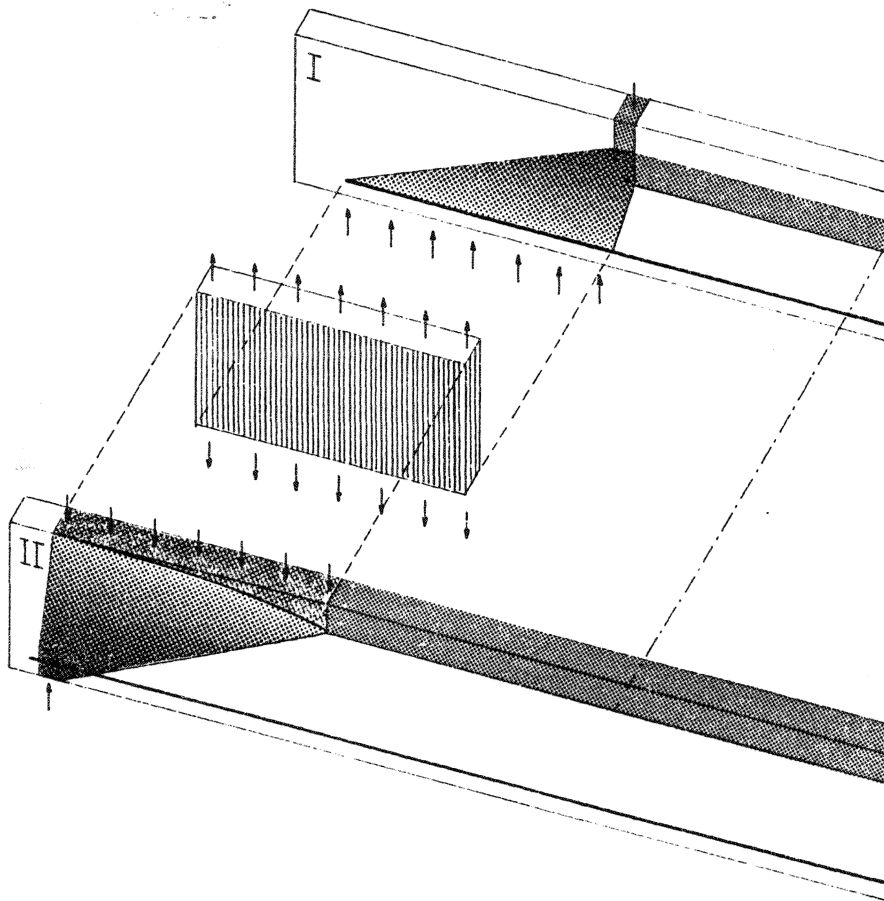


Bild 2.15: Kombination zweier Tragsysteme

Die Auflagerkraft des Tragsystems I belastet über eine vertikale Bewehrung das Tragsystem II. Diese Bewehrung besteht aus Biegeln, die oben und unten gut verankert werden müssen. Das Spannungsfeld des Tragsystems II kann aus Abschnitt 2.2.3 übernommen werden (gleiche Lasten und Abmessungen).

Für die Entwicklung des Tragsystems I muss berücksichtigt werden, dass die Auflagerkraft verteilt wirkt. Es resultiert ein Fächer, dessen vertikale Komponente am unteren Rand von der Bügelbewehrung aufgenommen wird. Die horizontale Komponente wird über Haftspannungen in die Längsbewehrung eingeleitet. Aus der Annahme einer konstanten Verteilung der Bügelbewehrungskraft und infolge der variablen Hauptspannungsrichtung im Fächer ergibt sich ein nichtlinearer Kräfteverlauf in der Längsbewehrung. Es ist zu bemerken, dass nicht die gesamte Trägerhöhe für das System I verfügbar ist, da der obere Rand des Trägers für das System II ausgenützt ist. Die totale Höhe der horizontalen Druckstrebe sowie die gesamte Bewehrungskraft der beiden Systeme sind in Feldmitte gleich wie im Bild 2.14.

Das gesamte Spannungsfeld mit allen Abmessungen und Kräften ist im Bild 2.16 dargestellt.

Bild 2.17a zeigt eine mögliche Bewehrungsskizze dieses Trägers. Drei Längseisen übernehmen die Umlenkung der Auflagerreaktion und müssen hinter dem Auflager verankert werden. Die seitlichen vier Eisen werden kontinuierlich durch Haftspannungen beansprucht. Bild 2.17b zeigt einen Vergleich der vorhandenen Kraft in der Längsbewehrung mit der aufnehmbaren Kraft. Der Verlauf der aufnehmbaren Kraft kann leicht hergeleitet werden, indem angenommen wird, dass sein Gradient der Haftfestigkeit der Bewehrung entspricht. Aus diesem Bild ist ersichtlich, dass diese vier Längseisen nicht unbedingt hinter dem Auflager verankert werden müssen.

Aus dem Bild 2.16a ist ersichtlich, dass sich die zwei Fächer im Bereich ABC überlagern, was zu einer leichten Verletzung der Fließbedingung ( $|\sigma| > f_{ce}$ ) führt. Obschon diese Lösung für eine praktische Anwendung vertretbar ist, wird zusätzlich ein Spannungsfeld ohne Ueberlagerungszone (ABC) konstruiert. Die Bügelbewehrung wird über die Länge BD verteilt, was aber zu einer Verschiebung ihrer Resultierenden führt. Damit verändert sich die Lage des Punktes C und somit auch des Punktes B, was zu einer iterativen Lösung des Problems führt. Das endgültige Spannungsfeld ist im Bild 2.18 dargestellt.

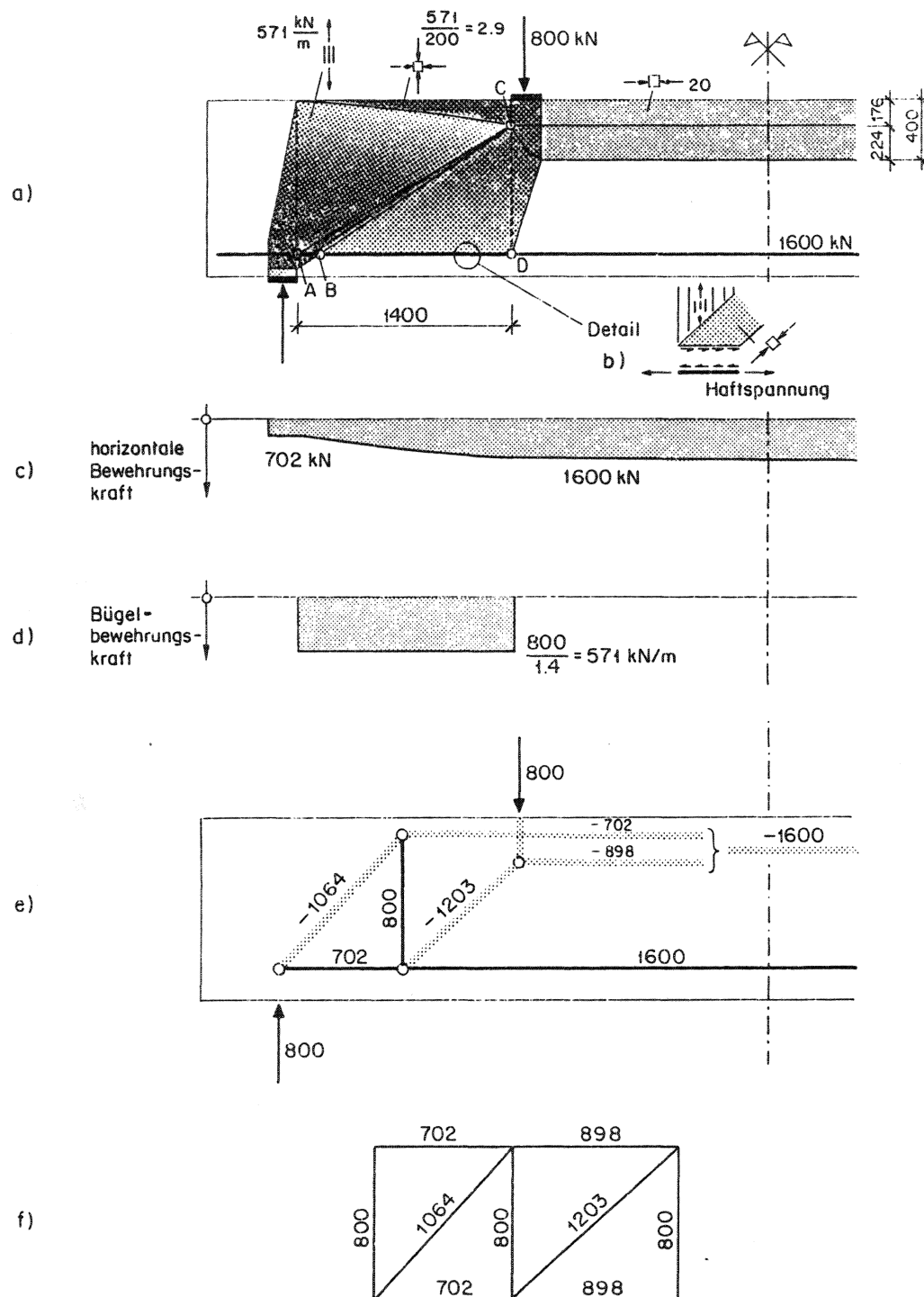


Bild 2.16: Spannungsfeld (indirekte Abstützung; Verlauf der horizontalen Bewehrungskraft; Resultierende des Spannungsfeldes; Cremonaplan

Bügelbewehrung :

Kraft pro Einheitslänge = 571 kN/m, Fläche pro Einheitslänge = 1241 mm<sup>2</sup>/m  $\rightarrow \phi 10, s = 100$  mm

Längsbewehrung in A :

Kraft = 702 kN, Fläche =  $\frac{702 \cdot 10^3}{460} = 1526 \text{ mm}^2 \rightarrow 3 \phi 26$

Längsbewehrung in B :

Kraft = 1600 kN, Fläche =  $\frac{1600 \cdot 10^3}{460} = 3478 \text{ mm}^2 \rightarrow 7 \phi 26$

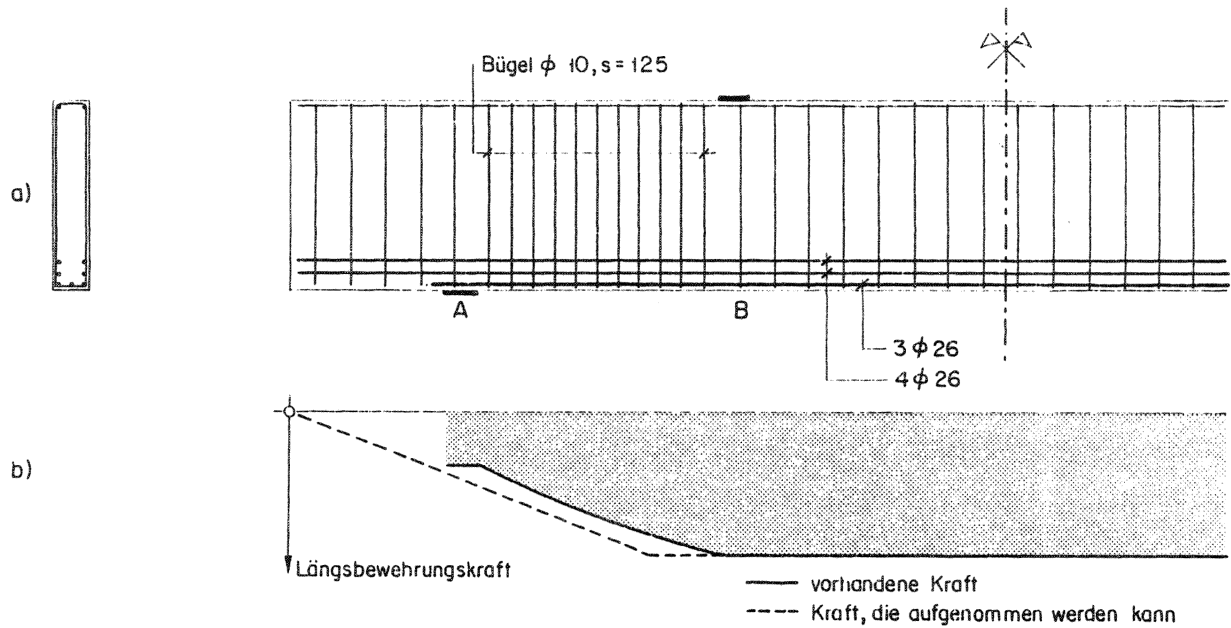


Bild 2.17: Bewehrungsskizze und Verlauf der Längsbewehrungskraft

Bügelbewehrung: Kraft = 800 kN

Verteilungsbreite = 1251 mm

Kraft pro Längeneinheit =  $\frac{800}{1251} = 639 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

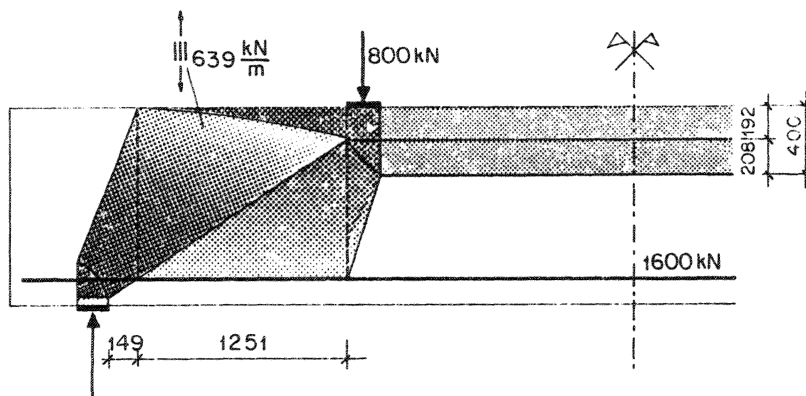


Bild 2.18: Spannungsfeld

Die Ueberlagerung der zwei Fächer könnte auch beseitigt werden, indem gemäss Bild 2.8b die horizontale Fächerkomponente beim Auflager über Haftspannungen in die Bewehrung eingeleitet wird.

### 2.2.5 Grosse Schlankheit, konzentrierte Lasten

Die Abmessungen, mit Ausnahme der Spannweite, die verdoppelt wird, die Materialfestigkeiten und die Lasten bleiben wiederum unverändert. Abgesehen von der Aenderung des inneren Hebelarms nimmt Druckgurtkraft mit der Schlankheit proportional zu. Da im vorangehenden Beispiel für die Druckzone bereits 40% der statischen Höhe ausgenützt sind, muss jetzt der Querschnitt in diesem Bereich verbreitert werden. Analog zur Druckkraft nimmt auch die Längsbewehrungskraft zu. Damit die daraus resultierende grosse Bewehrungsfläche nicht zu konstruktiven Problemen führt, muss der Querschnitt auch im Zugbereich verbreitert werden (Bild 2.19a).

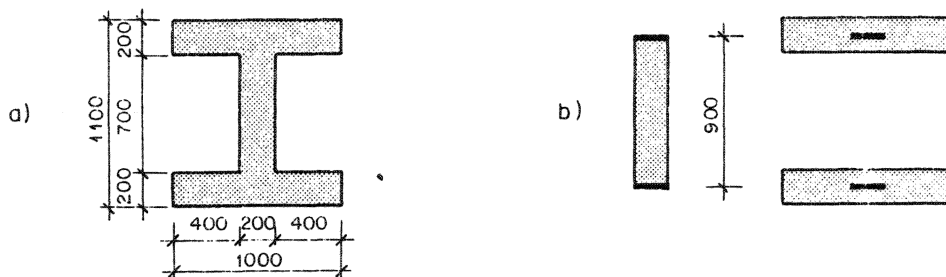


Bild 2.19: Querschnitt mit Abmessungen und Zerlegung in Steg, Druck- und Zugplatten

Es wird angenommen, dass die horizontalen Druck- und Zug-Resultierenden im Schwerpunkt der beiden Gurtplatten wirken. Der Träger kann somit in drei Scheiben aufgeteilt werden (Bild 2.19b). Die beiden Gurtplatten werden später untersucht.

Das Spannungsfeld zur Beschreibung der Stegbeanspruchung kann analog Bild 2.15 entwickelt werden. Der erhöhten Schlankheit wird Rechnung getragen, indem einander drei anstatt zwei Tragsysteme kombiniert werden. Damit resultiert eine nicht zu kleine Druckfeldneigung im Steg (Bild 2.20).

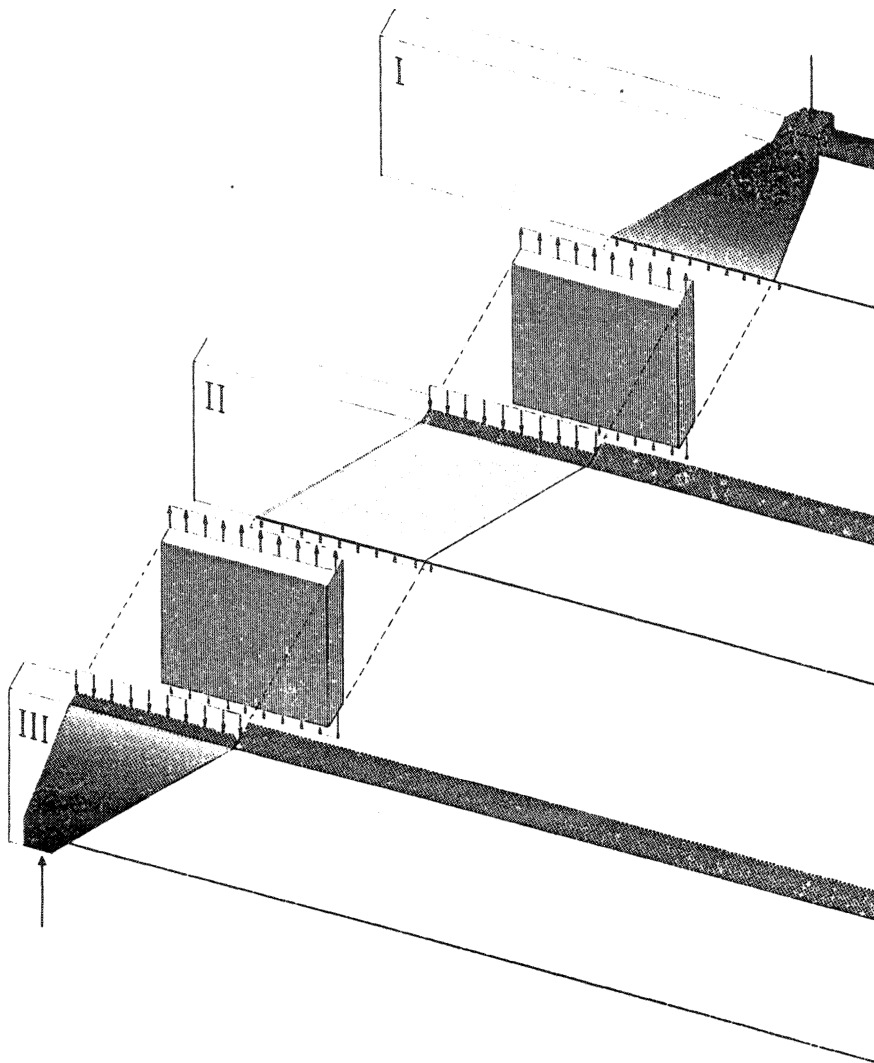


Bild 2.20: Kombination dreier Tragsysteme

Es ist zu bemerken, dass die statische Höhe der drei Tragsysteme konstant bleibt. Die horizontale Druckkraft breitet sich in horizontaler Richtung (Gurtplatte) aus.

Bild 2.21 zeigt das aus der Ueberlagerung der drei Tragsysteme resultierende Spannungsfeld. Das Spannungsfeld im Beton besteht aus zwei Fächern und einer dazwischen liegenden Druckstrebe. Die Spannung in dieser Druckstrebe wird durch Division der Resultierenden durch Breite und Dicke bestimmt. Analog Bild 2.16 ist eine Ueberlagerung verschiedener Bereiche vorhanden, was für eine praktische Bemessung ohne Bedeutung ist. Das Problem könnte, wie im Bild 2.18 dargestellt, gelöst werden.



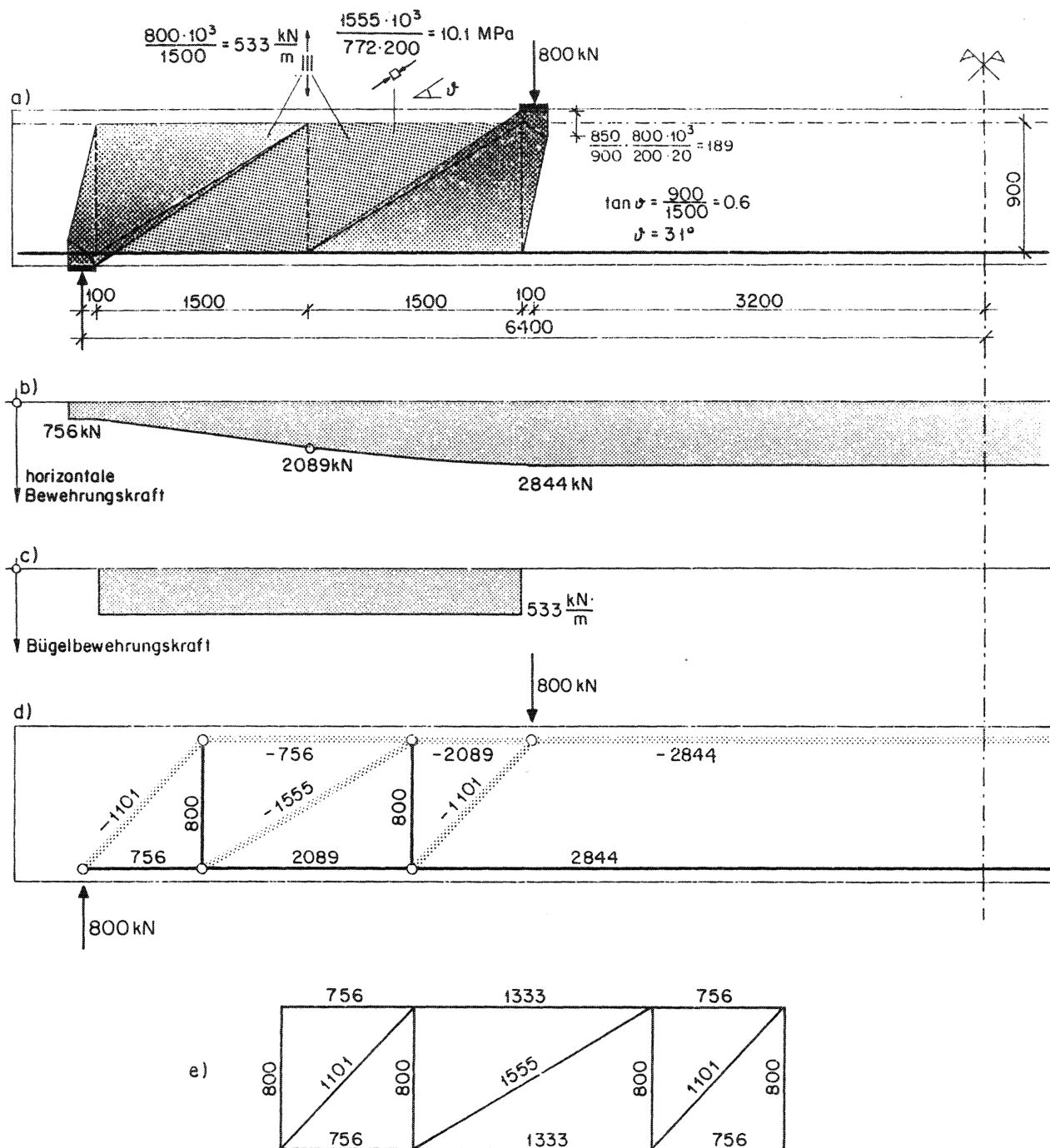


Bild 2.21: Spannungsfeld, Verlauf der Bewehrungskräfte;  
Resultierende des Spannungsfeldes und Cremonaplan

Die Bewehrung wird erst konstruiert, nachdem die Spannungsfelder beider Gurtplatten bekannt sind.

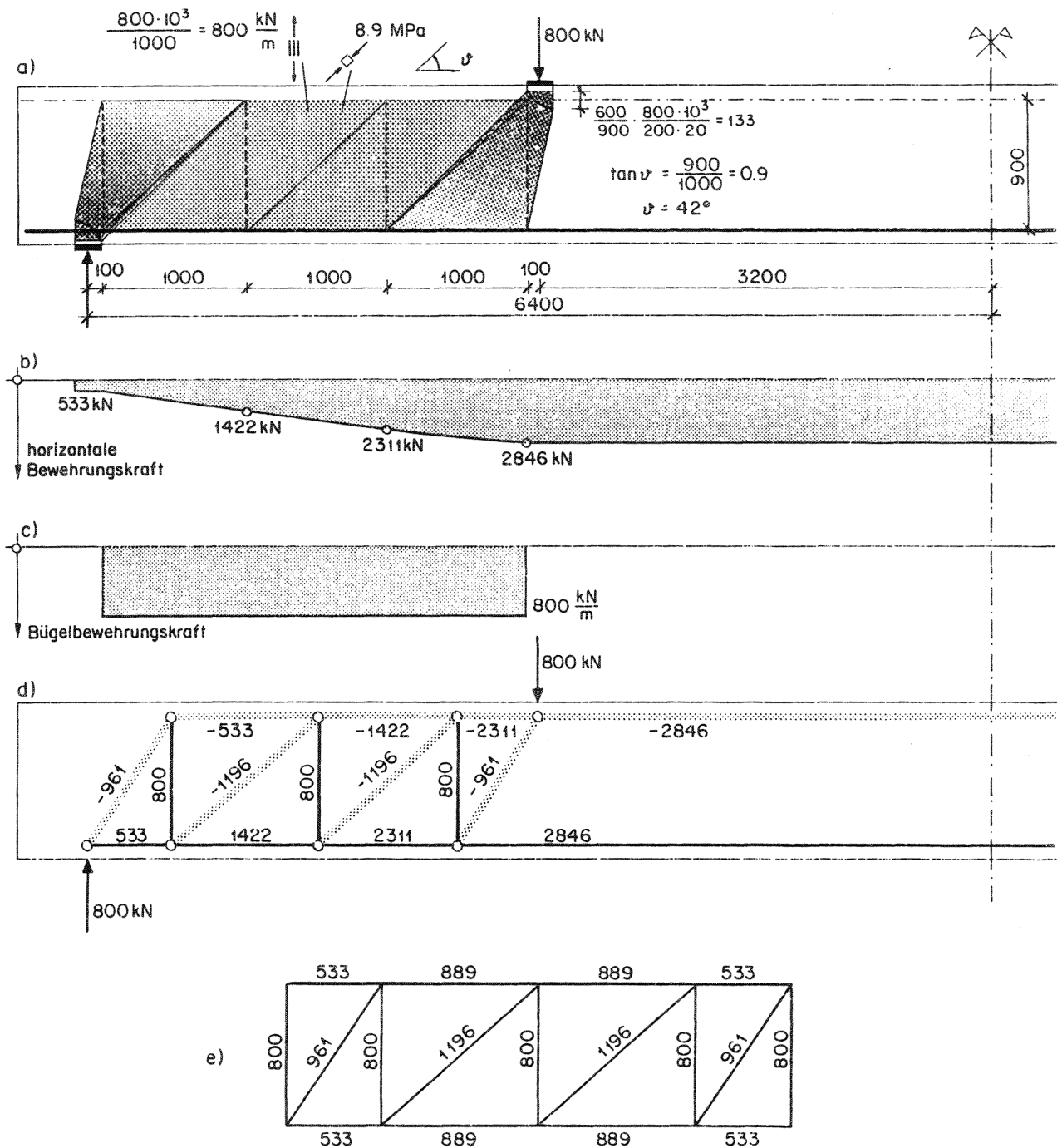


Bild 2.22: Spannungsfeld, Verlauf der Bewehrungskräfte, Resultierende des Spannungsfeldes

Als alternative Lösung kann ein Spannungsfeld mit dreifacher Aufhängung (Kombination von vier Tragsystemen) erhalten werden, was bei gleichbleibender Schlankheit eine Aenderung des Druckdiagonalenwinkels zur Folge hat. Dieses Spannungsfeld ist im Bild 2.22 dargestellt.

Die Resultierenden des Spannungsfeldes zeigen, dass zwischen den Lösungen der Beispiele mit kleiner, mittlerer und grosser Schlankheit eine Systematik vorliegt. Bild 2.23 erläutert diesen Zusammenhang.

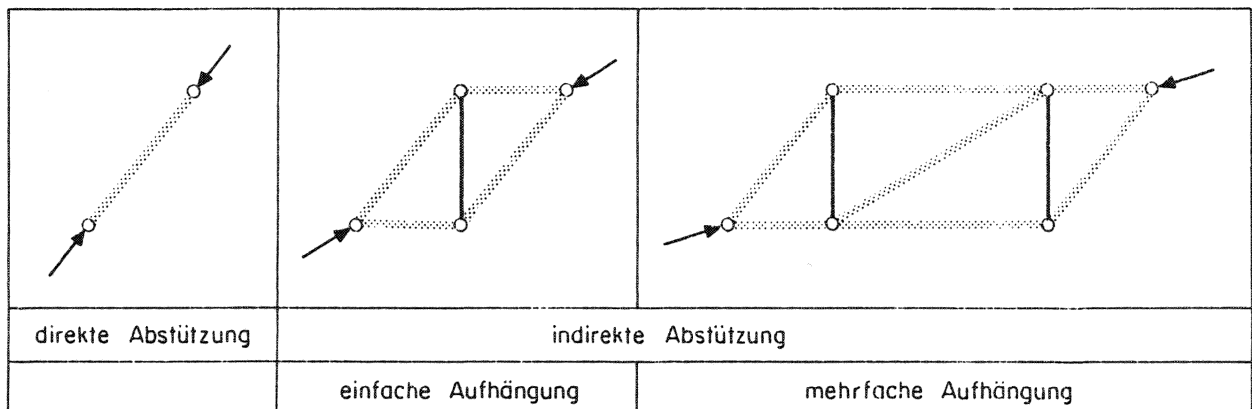


Bild 2.23: Schematische Tragwirkung der behandelten Beispiele

Es ist zu bemerken, dass das vertikale Gleichgewicht im mittleren Bereich des Spannungsfeldes (Bild 2.22a) durch Ueberlagerung zweier Felder erreicht wird (Bild 2.24a). Die vertikale Komponente des geneigten Druckfeldes hält der Bügelbewehrungskraft das Gleichgewicht. Die Komponente am oberen und am unteren Rand wird in die Gurtplatten eingeleitet.

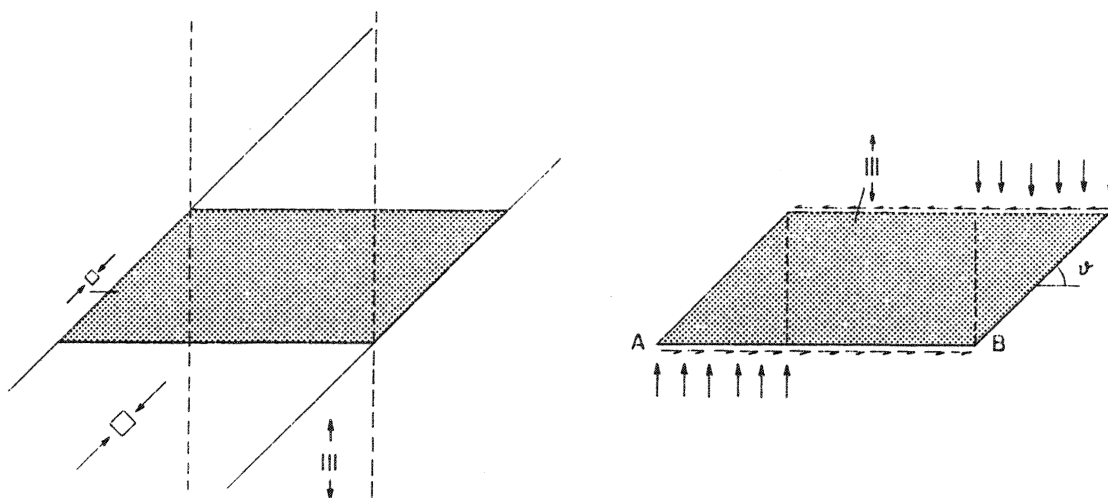


Bild 2.24: Stegbeanspruchung als Ueberlagerung zweier Felder

Das im Bild 2.24b dargestellte Element kann unabhängig von der Neigung  $\vartheta$  und von der Länge A-B entwickelt werden. Im Bild 2.25 wird ein Spannungsfeld mit  $\tan \vartheta = 0.75$  gezeigt.

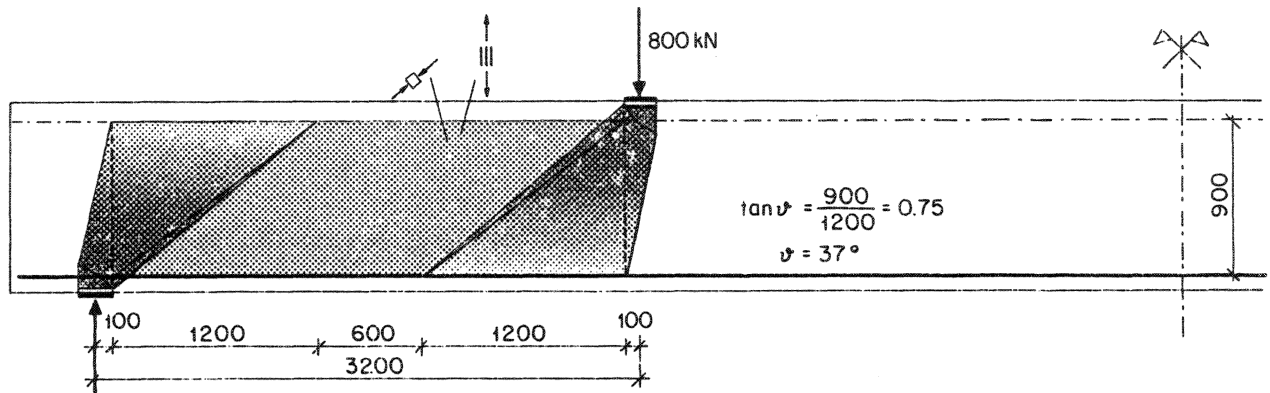


Bild 2.25: Spannungsfeld

Bei diesem Spannungsfeld können die zugehörigen Resultierenden nicht mehr in einfacher Weise dargestellt werden. Das ist jedoch für eine praktische Bemessung nicht erforderlich, da die inneren Kräfte durch Gleichgewichtsbetrachtungen an den Diskontinuitätslinien ermittelt werden können (Bild 2.26).

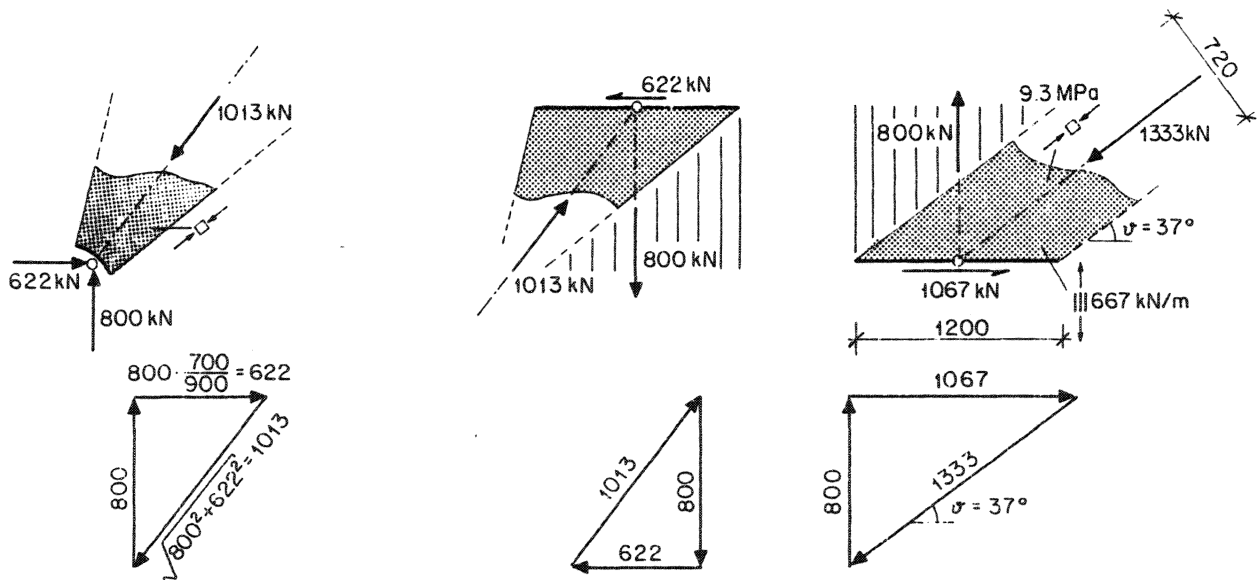


Bild 2.26: Gleichgewichtsbetrachtungen an den Diskontinuitätslinien

Die Wahl der Druckfeldneigung  $\vartheta$  hat, wie die drei behandelten Beispiele zeigen, einen Einfluss auf die inneren Kräfte. Die wichtigsten Größen sind im Bild 2.27 zusammengestellt.

	$\vartheta$	Längsbewehrungs- kraft beim Auflager	Bügelbewehrungs- kraft pro Einheitslänge	Betonspannung im geneigten Druckfeld
Beispiel 1	$31^\circ$	756 kN	533 kN/m	10.1 MPa
Beispiel 3	$37^\circ$	622 kN	667 kN/m	9.3 MPa
Beispiel 2	$42^\circ$	533 kN	800 kN/m	8.9 MPa

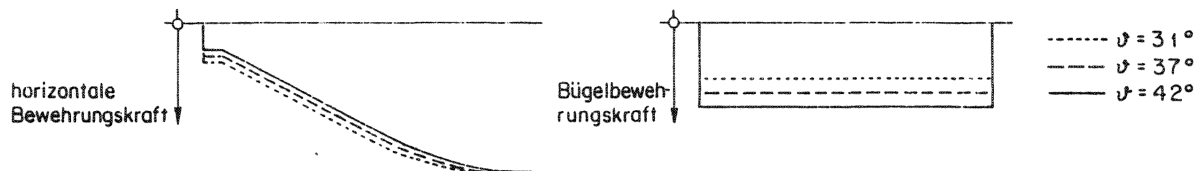


Bild 2.27: Vergleich der inneren Kräfte für verschiedene Druckfeldneigungen

Mit zunehmender Druckfeldneigung nimmt die horizontale Bewehrungskraft ab und die Bügelbewehrungskraft zu. Im Kapitel 1 wurde gezeigt, dass die Wahl der Aufteilung der inneren Kräfte in einem statisch unbestimmten System einen Einfluss auf das Verhalten im Gebrauchszustand hat. Mit der Wahl der Druckfeldneigung wird auch hier das Verhalten in analoger Weise beeinflusst. Das Bild 2.28 zeigt den qualitativen Verlauf Last-Verformung für zwei Druckfeldneigungen.

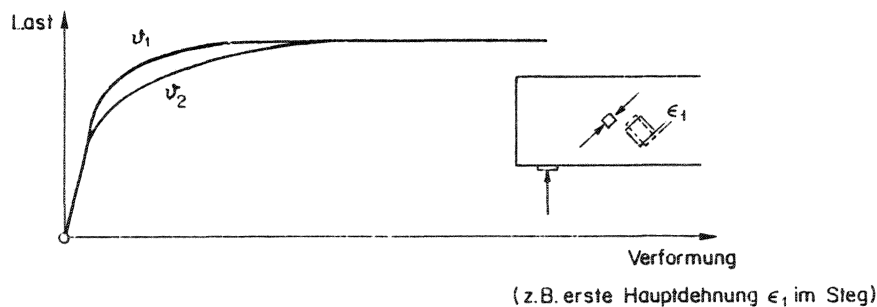


Bild 2.28: Last-Verformungs-Diagramm

Die Druckfeldneigung für ein optimales Verhalten bezüglich Gebrauchstauglichkeit (möglichst kleine Umlagerung der inneren Kräfte zwischen Gebrauchszustand und Bruchzustand) ist von vielen Parametern abhängig (Eigenspannungszustände, eventuelle Vorspannung oder Normalkraft, Bewehrungsgehalte, Steifigkeit des Druckgurtes, usw.) und lässt sich nur schwer herleiten. Wie im Kapitel 1 gezeigt wurde, haben nicht zu grosse Abweichungen von dieser Lösung keinen Einfluss auf

die Gebrauchstauglichkeit. Lösungen mit sehr kleinen oder sehr grossen Druckfeldneigungen sind jedoch zu vermeiden. In den Normen wird üblicherweise ein Bereich angegeben, in dem sie frei variiert werden kann.

Im Bild 2.27 ist ersichtlich, dass die Druckfeldneigung auch auf die Intensität der Betonbeanspruchung einen Einfluss hat. Bei sehr hoch beanspruchten Stegen ist  $\alpha$  so zu wählen, dass die effektive Betonfestigkeit nicht überschritten wird. Es ist zu bemerken, dass die Festigkeit  $f_{ce}$  in diesem Fall bedeutend tiefer ist als die Zylinderfestigkeit. Verantwortlich für diese Reduktion sind der Dehnungszustand im Steg (Querdehnung, resultierend aus der Verformung der Bewehrungen) und weitere Interaktionen mit der Bewehrung. Diese Einflüsse werden im Kapitel 3 näher beschrieben.

### 2.2.6 Grosse Schlankheit, verteilte Last

Betrachtet wird ein Träger mit gleichen Abmessungen wie im Abschnitt 2.2.5 beschrieben. Die zwei konzentrierten Lasten von je 800 kN werden über die gesamte Länge des Trägers verteilt, wodurch eine verteilte Last von 125 kN/m resultiert.

Das Spannungsfeld zur Beschreibung der inneren Beanspruchungen kann teilweise aus Bild 2.23a übernommen werden. Wie Bild 2.29 zeigt, resultiert in diesem Fall eine stufenweise Variation der Intensität des geneigten Druckfeldes und der Bügelkräfte über die Länge des Trägers.

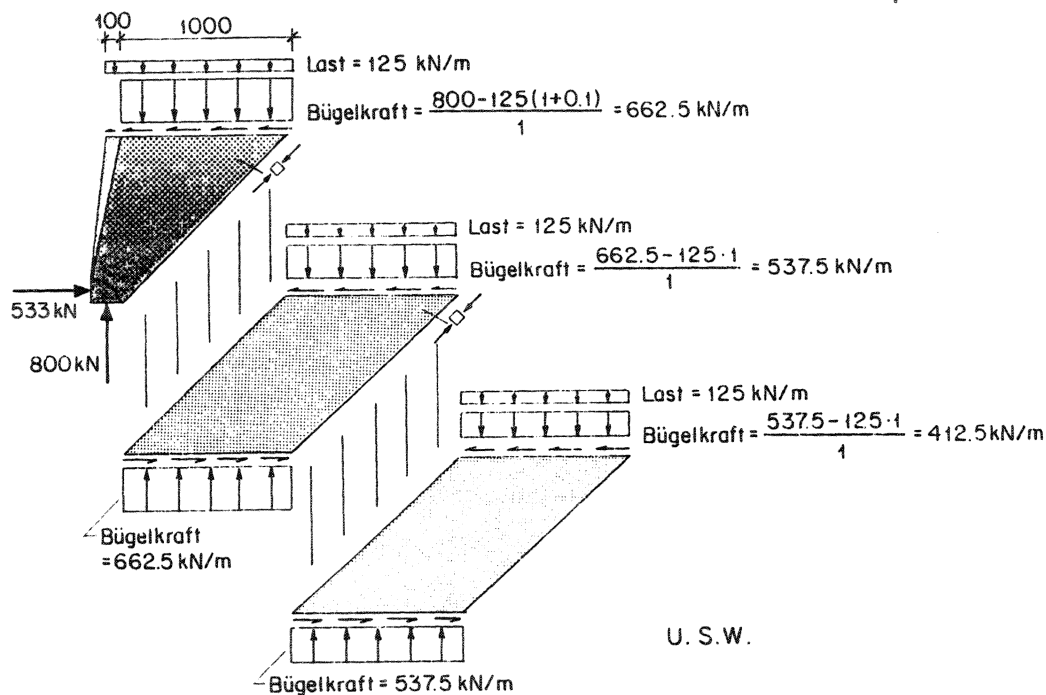


Bild 2.29: Entwicklung des Spannungsfeldes

Im Bild 2.30 sind das vollständige Spannungsfeld, die Bewehrungskräfte sowie die Resultierende des Spannungsfeldes mit Cremonaplan dargestellt.

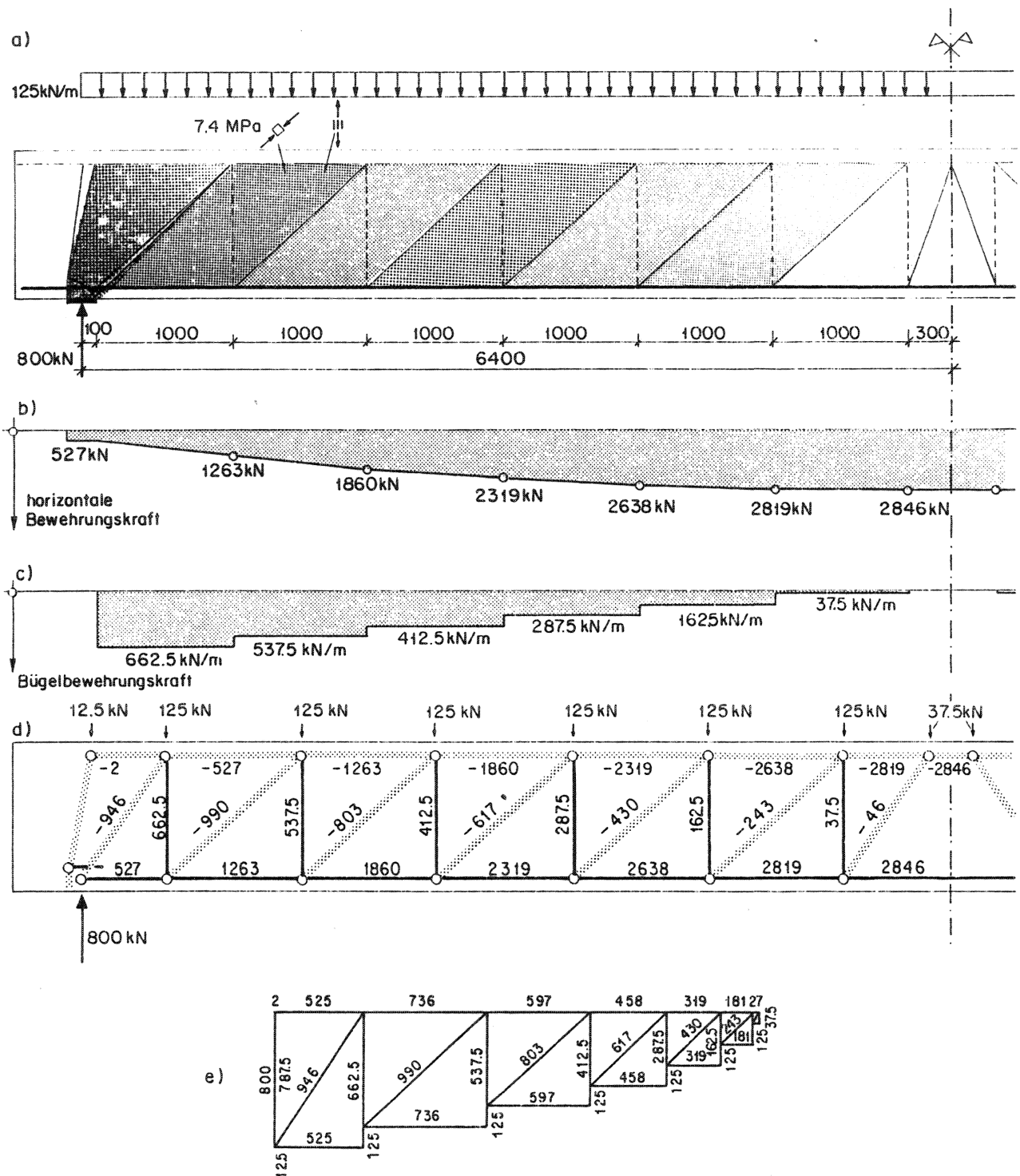


Bild 2.30: Spannungsfeld, Verlauf der Bewehrungskräfte, Resultierende des Spannungsfeldes und Cremonaplan



Der Lastanteil im Bereich der Auflagerplatte (12.5 kN) wird direkt eingeleitet. Es entsteht somit in diesem Bereich ein kleiner zusätzlicher Fächer, der für eine praktische Bemessung ohne Bedeutung ist. Die Druckfeldneigung kann in jedem Fall über die Länge des Trägers variiert werden. Bild 2.31 zeigt qualitativ eine allgemeine Lösung.

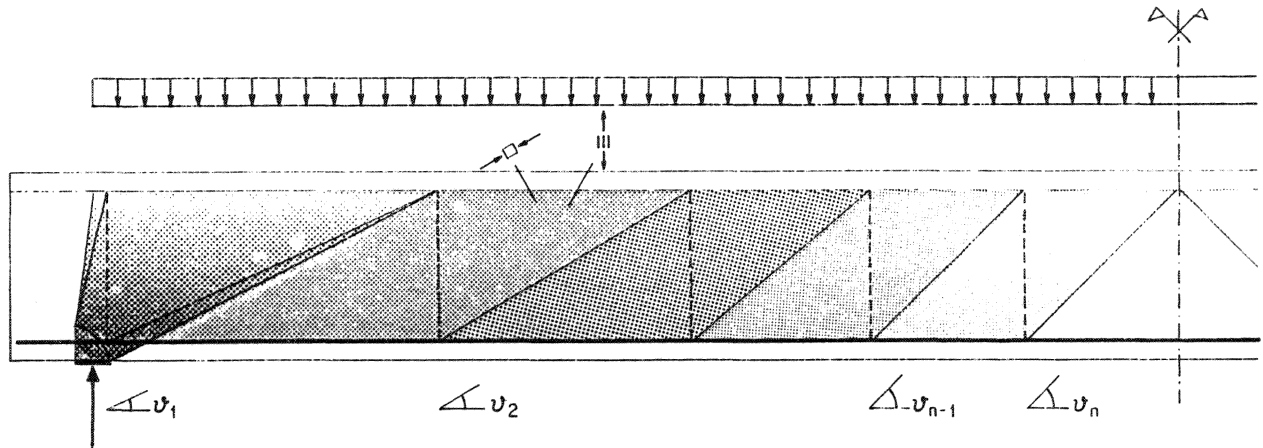


Bild 2.31: Spannungsfeld mit variabler Druckfeldneigung

Bei der im Bild 2.30a dargestellten Lösung ist  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_{n-1}$ ;  $\vartheta_n$  musste grösser gewählt werden.

Die Beanspruchung der Gurtplatten sowie eine Bewehrungsskizze des gesamten Trägers werden später dargestellt.

### 2.2.7 Allgemeiner Fall, praktische Bemessung

Gegeben sei der im Bild 2.32 dargestellte Träger unter unregelmässiger Belastung. Alle angegebenen Lasten sind mit dem globalen Sicherheitsfaktor multipliziert. Die Bemessung erfolgt auf dem "Bruchniveau". Der innere Hebelarm resultiert aus der Annahme, dass die Resultierende der Druck- und Zuggurtkräfte im Schwerpunkt der Gurtplatten wirken. Das Spannungsfeld kann qualitativ entwickelt werden, indem Elemente der bereits bekannten Lösungen sinngemäss übernommen werden (Bild 2.33).

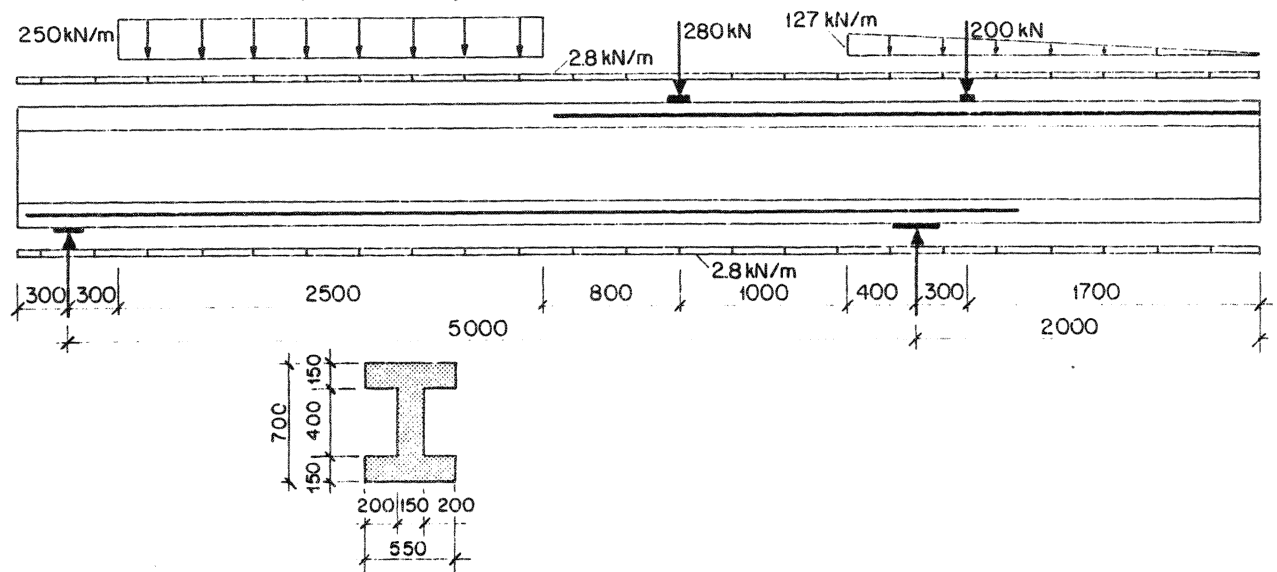


Bild 2.32: Träger und Belastung

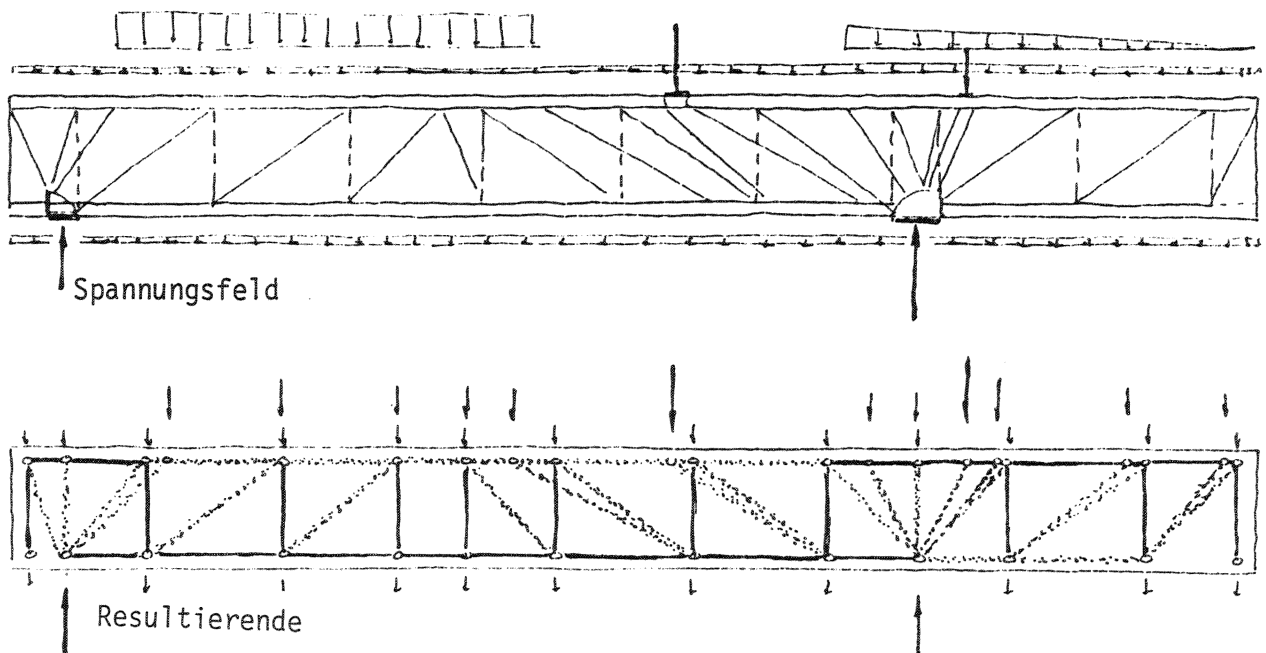


Bild 2.33: Skizze des Spannungsfeldes und der Resultierenden

Das Spannungsfeld wurde unter Beachtung folgender Merkmale entwickelt:

- Alle in den vorangehenden Abschnitten behandelten Träger weisen Symmetrie bezüglich Feldmitte sowohl der Geometrie als auch der Belastung auf. Die Spannungsfelder sind somit auch symmetrisch, so dass in Feldmitte die Richtung der diagonalen Druckstreben im Steg sprunghaft ändert. Allgemein ist dies im Querkraftnullpunkt der Fall.
- Der Abstand der auf den Kragarm wirkenden konzentrierten Last vom Auflager ist genügend klein, so dass sich diese Last direkt abstützen kann. Die im Feld angreifende Last muss hingegen indirekt abgestützt werden. Das Spannungsfeld unterhalb dieser Last wird so aufgefächert, dass die Bügelbewehrung gemäss Bild 2.34 konstant bleibt.

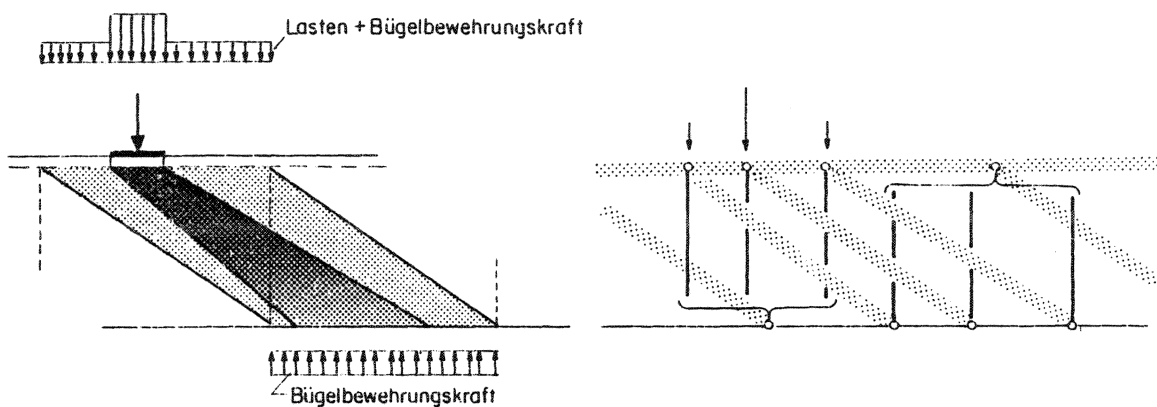


Bild 2.34: Einleitung einer konzentrierten Last

- Eine ähnliche Lösung kann auch im Bereich der Konsole angewendet werden, damit auch bei variabler Last eine bereichsweise konstante Bügelbewehrung resultiert.
- Das Eigengewicht wirkt näherungsweise zur Hälfte am oberen und zur Hälfte am unteren Trägerrand.

Die endgültige Bemessung eines Trägers kann grundsätzlich nach zwei verschiedenen Methoden erfolgen. Die erste Methode besteht darin, dass das Spannungsfeld auch quantitativ gesamthaft entwickelt wird (integrale Betrachtungsweise, Bild 2.35).

Bild 2.35: Integrale Betrachtungsweise; Spannungsfeld, Verlauf der Bewehrungskräfte, Resultierende und Cremonaplan

Wie die behandelten Beispiele zeigen, bilden die Resultierenden des Spannungsfeldes ein fachwerkartiges System. Die Beanspruchungen der Spannungsfeldelemente ergeben sich aus den Kräften in den Fachwerkstäben, die sich aus Gleichgewichtsbedingungen in den einzelnen Knoten sukzessiv bestimmen lassen.

Bei der Bemessung einfacher Tragwerke ist es nicht erforderlich, sämtliche Kräfte und Spannungen zu bestimmen. Die zweite Bemessungsmethode besteht darin, mit Hilfe gezielter Schnitte durch das Spannungsfeld in den massgebenden Bereichen die inneren Beanspruchungen zu bestimmen (Schnittbetrachtungsweise). Eine sichere Anwendung dieser Methode ist allerdings nur dann gewährleistet, wenn der qualitative Verlauf des gesamten Spannungsfeldes bekannt ist.

Bild 2.36 zeigt eine mögliche Anwendung dieser Methode. Die Beanspruchungen werden durch Rittersche Schnitte des "Fachwerkes" bestimmt.

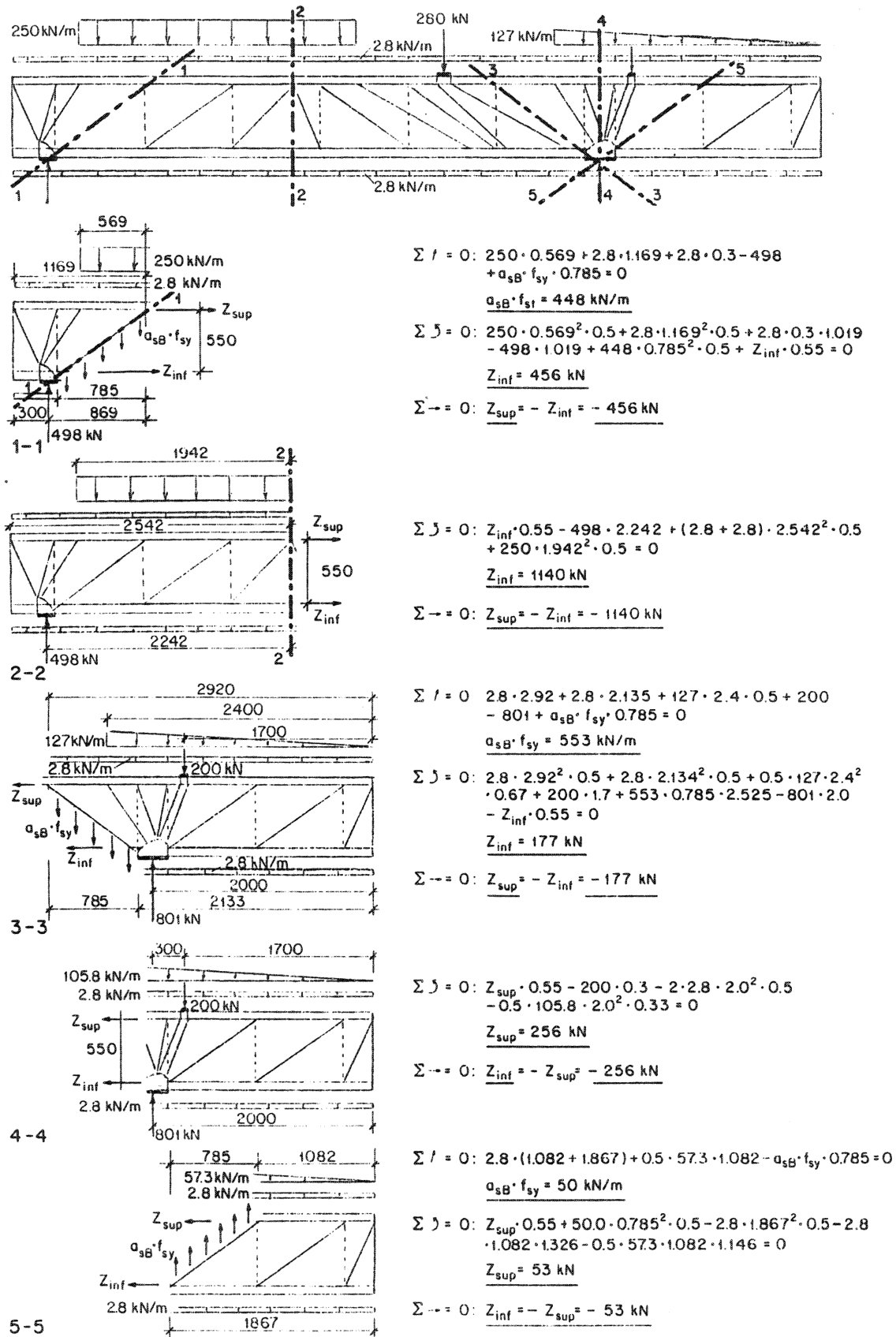


Bild 2.36: Schnittbetrachtungsweise



## 2.3 Gurtplatten

### 2.3.1 Druckplatte

Untersucht wird die Druckplatte des Trägers aus Abschnitt 2.2.6. Die Belastung dieser Scheibe entspricht den horizontalen Schubbeanspruchungen, die am oberen Rand des Steges wirken (Bild 2.29). Die Ausbreitung dieser Kräfte in der Druckscheibe kann mit einfachen Spannungsfeldern beschrieben werden (Bild 2.38). Für die Wahl des Ausbreitungswinkels sind die dieselben Ueberlegungen gültig wie bei der Wahl der Druckfeldneigung im Steg.

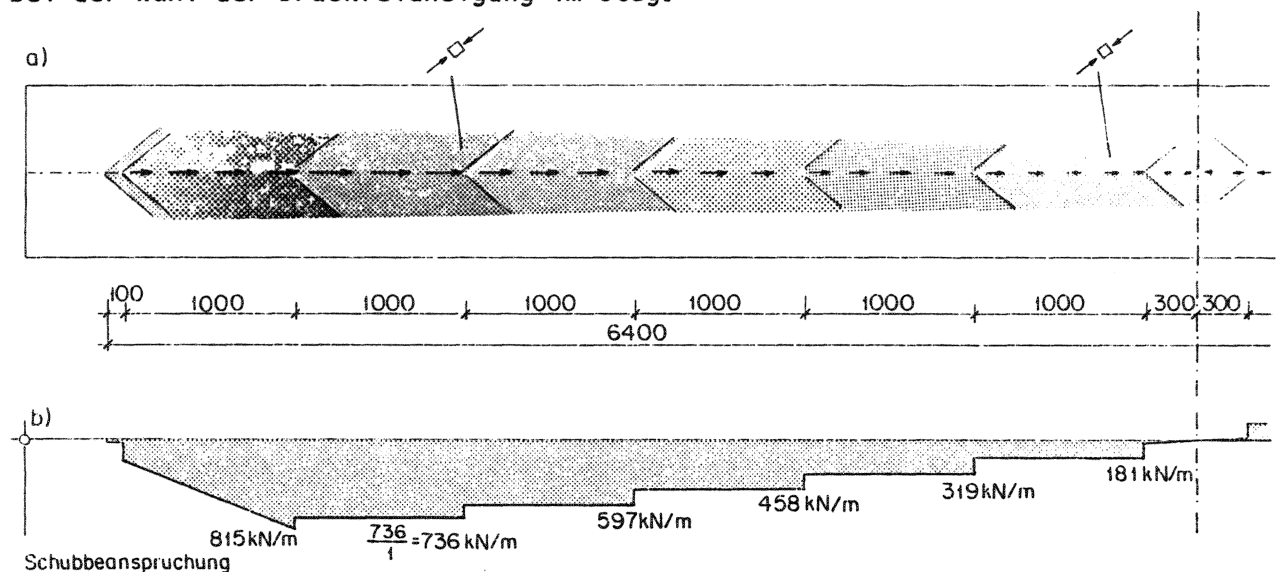


Bild 2.38: Kraftausbreitung in der Druckplatte

Die geneigten Druckfelder können mit einer Querbewehrung in Längsrichtung umgelenkt werden. Bild 2.39 zeigt diese Umlenkung im Detail.

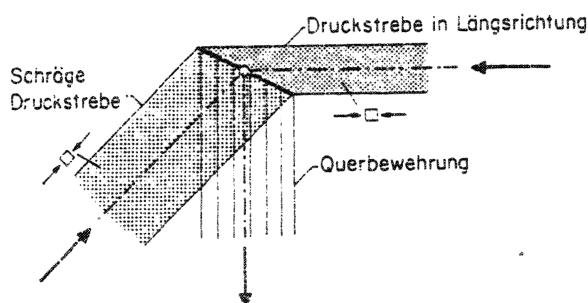


Bild 2.39: Umlenkung der Druckfelder im Detail



Bei dieser Lösung wirkt die Ulenkkraft aus der Querbewehrung an der Diskontinuitätslinie zwischen den beiden Druckstreben. Die Bewehrungskraft ist ab dieser Diskontinuitätslinie zu verankern.

Es ist zu bemerken, dass diese Lösung den allgemeinen Fall der Umlenkung einer Druckstrebe mit einer Bewehrung darstellt, bei dem die drei Feldelemente diskrete Abmessungen aufweisen. Spezialfälle dieser Lösung, bei denen entweder die Bewehrung oder eine Druckstrebe konzentriert wirken, sind im Abschnitt 2.2.1 (Bild 2.8c) und im Abschnitt 2.2.4 (Bild 2.16b) behandelt worden.

Die Breiten der schrägen Druckstreben ergeben sich aus den Abmessungen der Druckstreben im Steg und aus dem Ausbreitwinkel. Die Breite der Druckstreben in Längsrichtung ergibt sich hingegen aus der angenommenen Verteilung der Druckbeanspruchung in Feldmitte. Wird angenommen, dass diese Beanspruchung konstant ist, sind die Breiten proportional zur Kraft in Längsrichtung und entsprechend zur Schubbeanspruchung Steg – Druckplatte. Im Bild 2.40 ist das vollständige Spannungsfeld inklusive Querbewehrungskraft und Resultierende dargestellt.

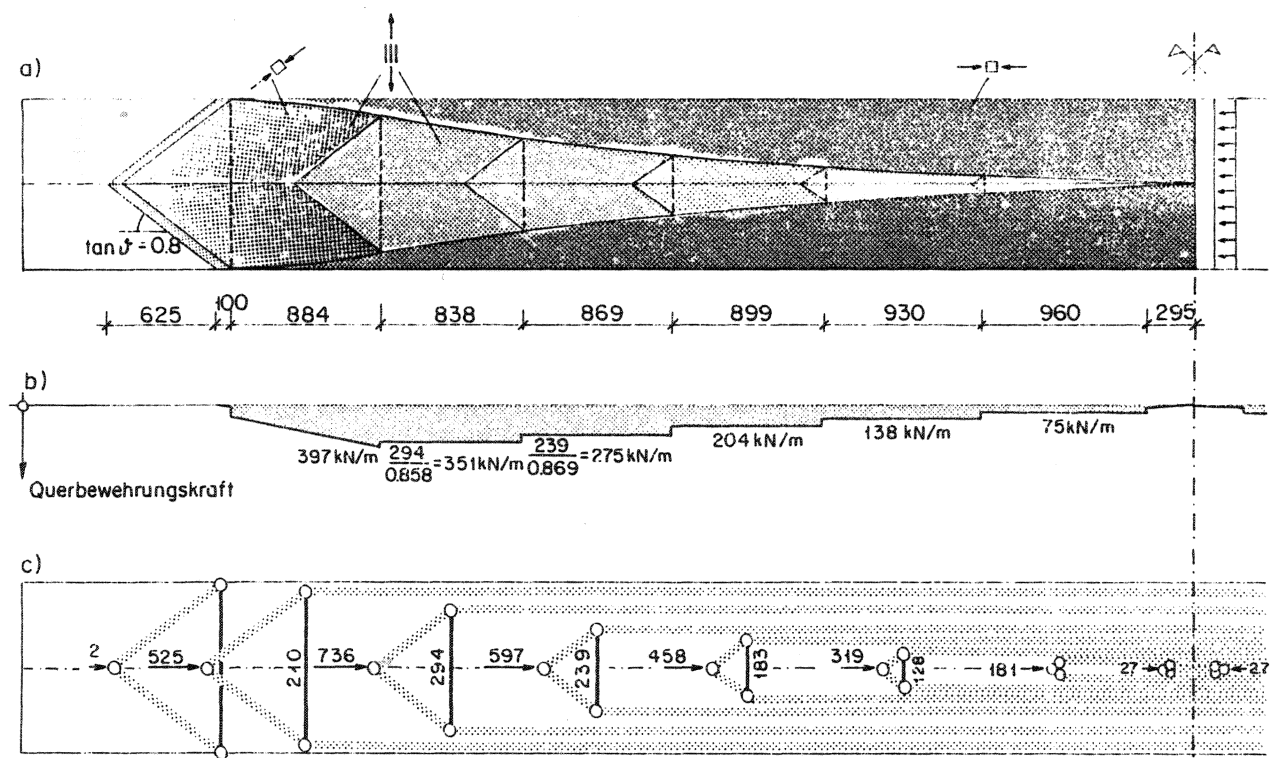


Bild 2.40: Spannungsfeld, Querbewehrungskraft und Resultierende

Diese Lösung ist streng genommen nur für unendlich dünne Stege gültig. Die Berücksichtigung der Stegbreite führt zu Spannungsfeldern mit kleinerer Querbewehrungskraft.

### 2.3.2 Zugplatte

Für die Zugplatte sind ähnliche Ueberlegungen wie für die Druckplatte gültig. Bild 2.41 zeigt die Beanspruchung sowie deren Ausbreitung in der Platte.

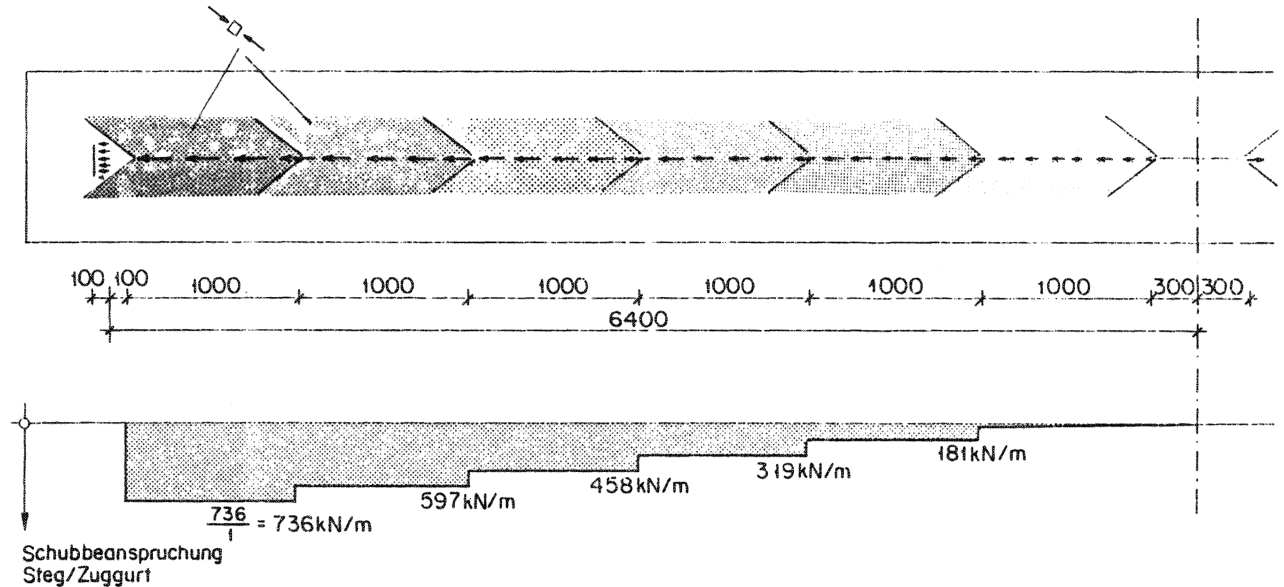


Bild 2.41: Kraftausbreitung in der Zugplatte

Analog wie bei der Druckplatte kann auch hier die Komponente der Drückstreben in Querrichtung mit einer Querbewehrung aufgenommen werden. Die Komponente in Längsrichtung wird hingegen wie im Bild 2.42 dargestellt mit einer Längsbewehrung aufgenommen.

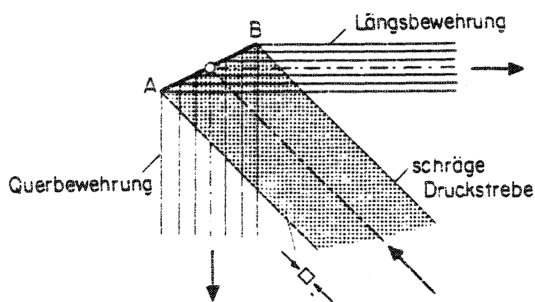


Bild 2.42: Gleichgewichtszustand der Feldelemente

Es ist zu bemerken, dass die Querbewehrung sowie die Längsbewehrung hinter der Diskontinuitätslinie AB zu verankern sind.

Analog wie bei der Druckplatte ergeben sich die Breiten der schrägen Druckstreben aus den Abmessungen der Druckstreben im Steg und aus dem angenommenen Ausbreitwinkel, und die Breite der einzelnen Zugfelder ergibt sich aus der angenommenen Verteilung der Zugbeanspruchung in Feldmitte.

Ausser den im Bild 2.41 dargestellten ausgebreiteten Kräften wirkt zusätzlich, und zwar konzentriert, die horizontale Komponente der Druckstrebenkraft beim Auflager (vgl. Bild 2.29). Diese Kraft wird in diesem Fall von einer Längsbewehrung innerhalb des Stegbereiches ohne Ausbreitung in der Zugplatte aufgenommen. Für die anderen Längskräfte wurde eine konstante Verteilung in Querrichtung gewählt. Bild 2.43 zeigt das vollständige Spannungsfeld der Zugscheibe sowie die Querbewehrungskraft und alle Resultierenden.

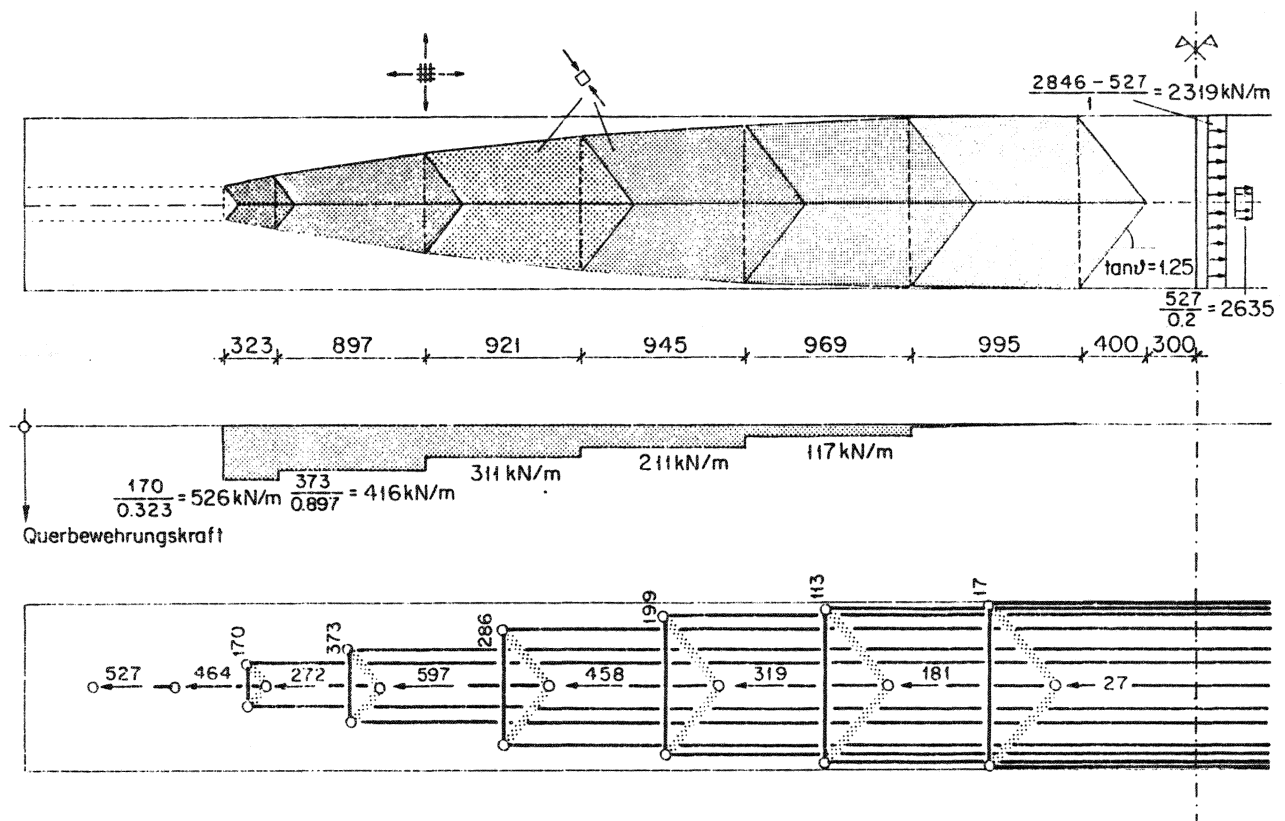


Bild 2.43: Spannungsfeld, Querbewehrungskraft und Resultierende

Im Bild 2.44 ist eine mögliche Bewehrungsanordnung für die drei Scheiben (Steg, Druckplatte, Zugplatte) skizziert.

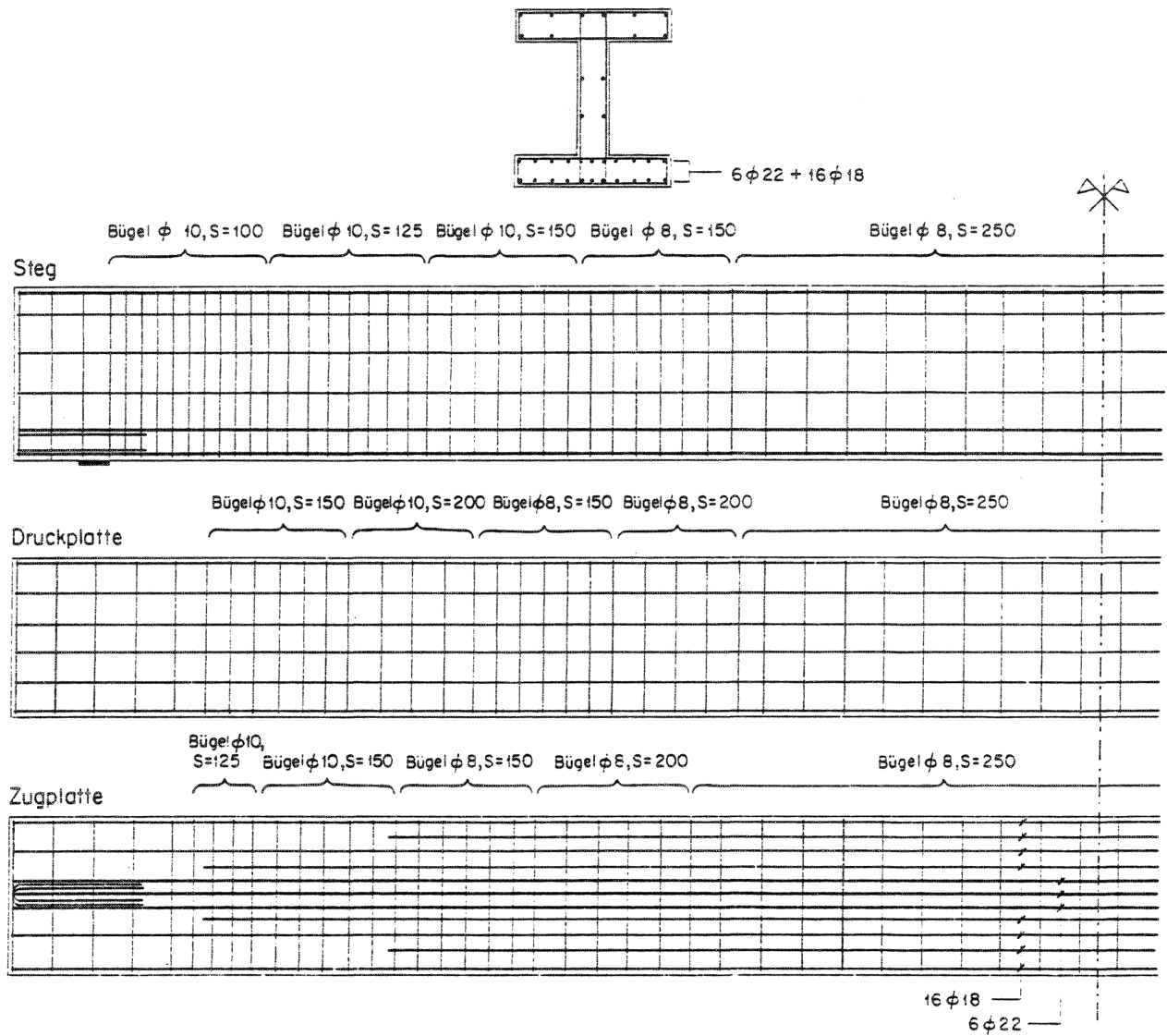


Bild 2.44: Bewehrungsskizze

## 2.4 Torsionsträger

### 2.4.1 Einführung

Die im Abschnitt 2.2 behandelten Beispiele weisen die Besonderheit auf, dass die Lasten in der Ebene des Trägersteges wirken. Im allgemeinen kann eine Last aufgenommen werden, wenn in Trägerlängsrichtung mindestens drei Scheiben vorhanden sind, die sich nicht in einer gemeinsamen Linie schneiden. Die Last lässt sich durch mindestens drei statisch äquivalente Lasten ersetzen, die in den Ebenen der einzelnen Trägerscheiben wirken. Die im Abschnitt 2.2 entwickelten Spannungsfelder können somit sinngemäss auf die einzelnen Scheiben angewendet werden.

Träger mit Vollquerschnitt lassen sich analog behandeln, indem verschiedene Scheiben in zweckmässiger Form eingepasst werden und das restliche Material als spannungslos betrachtet wird.

### 2.4.2 Wölb-torsion (offener Querschnitt)

Als Anwendung des oben beschriebenen Vorgehens wird der im Bild 2.45 dargestellte Träger behandelt.

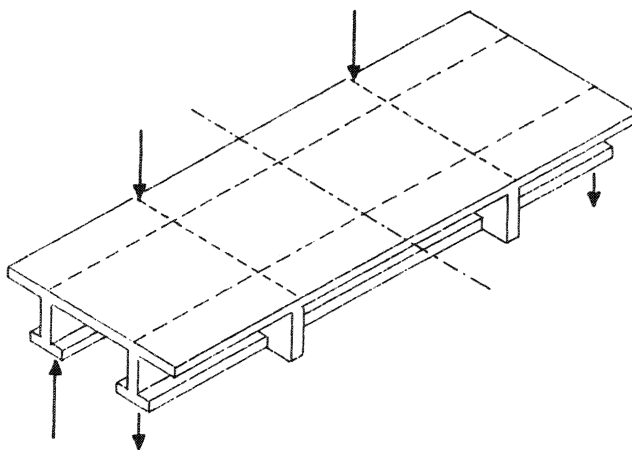


Bild 2.45: Torsionsträger mit offenem Querschnitt

Da die Wirkungslinie der Lasten parallel zu den Stegebenen ist, genügen in diesem Fall zwei Scheiben aus. Die Einleitung der Last in die beiden Stege erfolgt über Querbiegung der oberen Gurtplatte oder über eine Querscheibe wie im Bild 2.46 dargestellt .

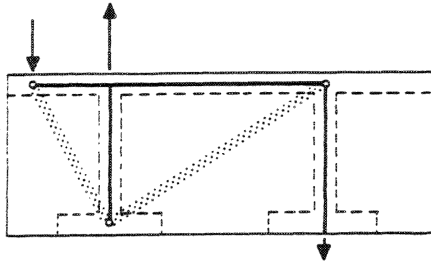


Bild 2.46: Belastung und Beanspruchung der Querscheibe

Die Spannungsfelder für die beiden Stege (Bild 2.47) und für die Gurtplatten können aus den Abschnitten 2.2 und 2.3 übernommen werden.

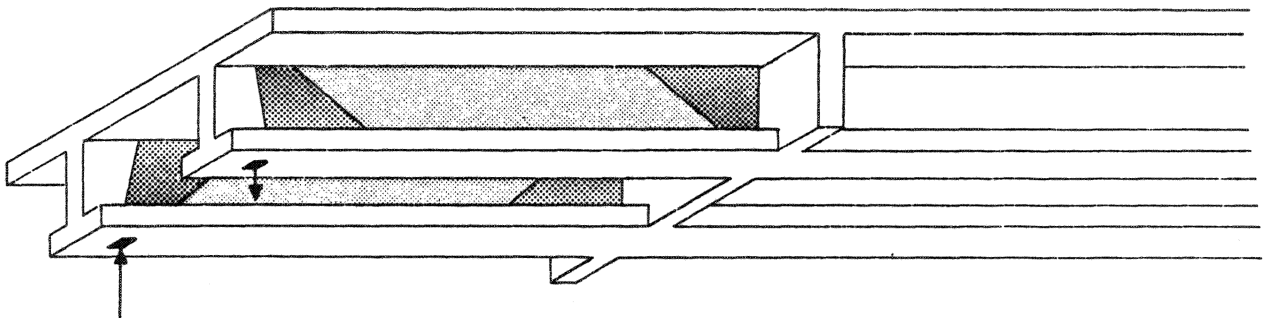


Bild 2.47: Spannungsfeld

#### 2.4.2 Umlauftorsion (geschlossener Querschnitt)

Im vorangehenden Beispiel wird die Torsionsbeanspruchung von den Stegen aufgenommen, die horizontalen Scheiben sind nur durch die daraus entstehenden Gurtkräften beansprucht.

Bei einem Träger mit geschlossenem Querschnitt, bei dem alle Scheiben auf Schub beansprucht sind, können bei reiner Torsion die Schubbeanspruchungen der einzelnen Scheiben so gewählt werden, dass sich die Gurtkraftgradienten aus zwei benachbarten Scheiben exakt kompensieren. Dies ist der Fall, wenn die spezifische

Schubbeanspruchung (Schubfluss) bei allen Scheiben gleich ist. Diese Tragwirkung wird mit Umlauftorsion bezeichnet und im folgenden Beispiel dargestellt (Bild

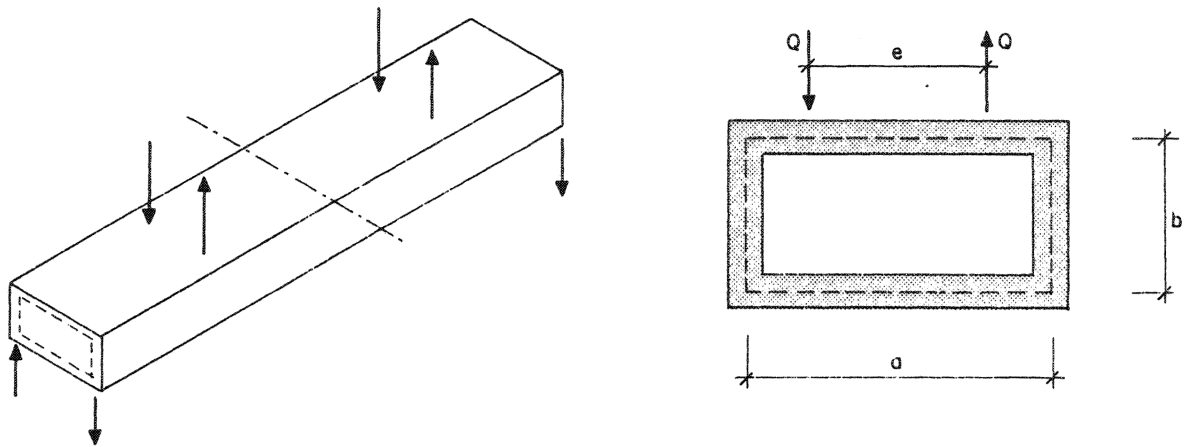


Bild 2.48: Geschlossener Querschnitt; System und Belastung

Die Scheibenschubkräfte sind proportional zu den Scheibenhöhen. Die Einleitung der Lasten in die einzelnen Scheiben kann, wie schon erwähnt, über Plattenquerbiegung der Scheiben oder über eine Querscheibe (Bild 2.49) erfolgen. Der Verlauf der inneren Kräfte in der Querscheibe wird im Abschnitt 2.5 mit Spannungsfeldern untersucht.

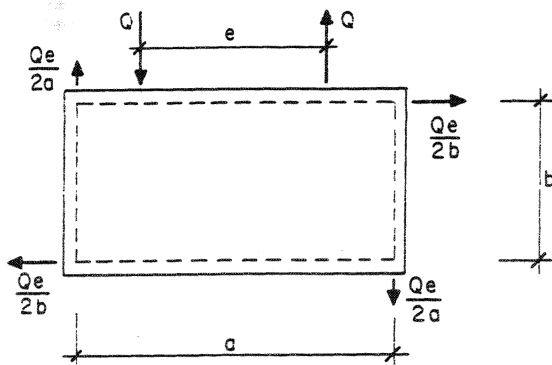


Bild 2.49: Belastung der Querscheibe

Die auf die einzelnen Scheiben wirkenden Kräfte sowie die zugehörigen Spannungsfelder sind im Bild 2.50 dargestellt.

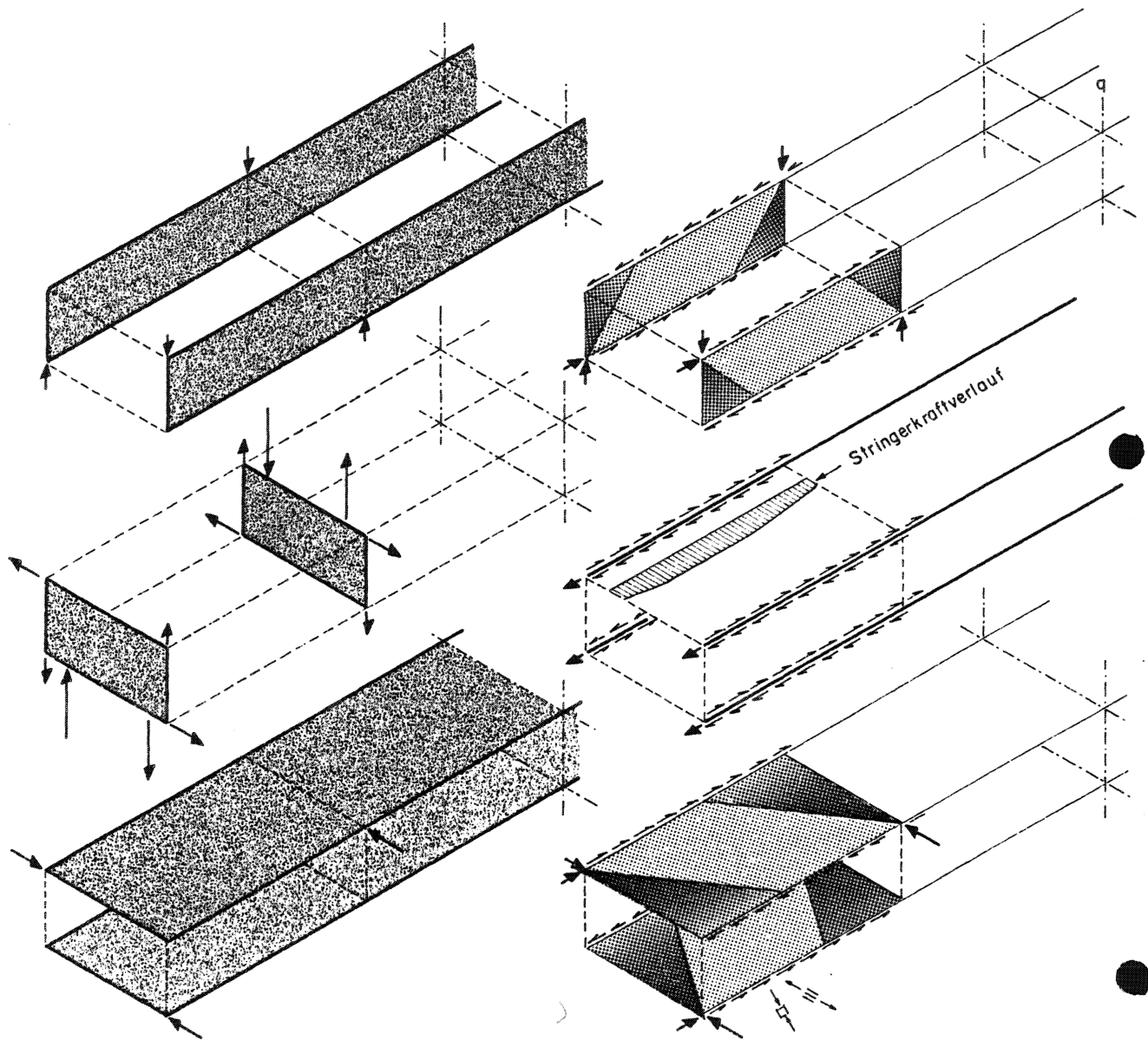


Bild 2.50: Beanspruchung und Spannungsfelder der Scheiben

Die Schubbeanspruchung an zwei benachbarten Scheibenrändern kompensieren sich nicht in den Randbereichen. Es resultieren somit nur auf Zug beanspruchte Stringer, die, über einen Querschnitt betrachtet, der Längskomponente der geneigten Druckfelder das Gleichgewicht halten.

Die Längsscheiben lassen sich getrennt bemessen. Die im Bild 2.37 hergeleiteten Gleichungen sind somit auch in diesem Fall gültig. Im Bild 2.51 ist eine solche Herleitung für einen allgemeinen Querschnitt dargestellt.



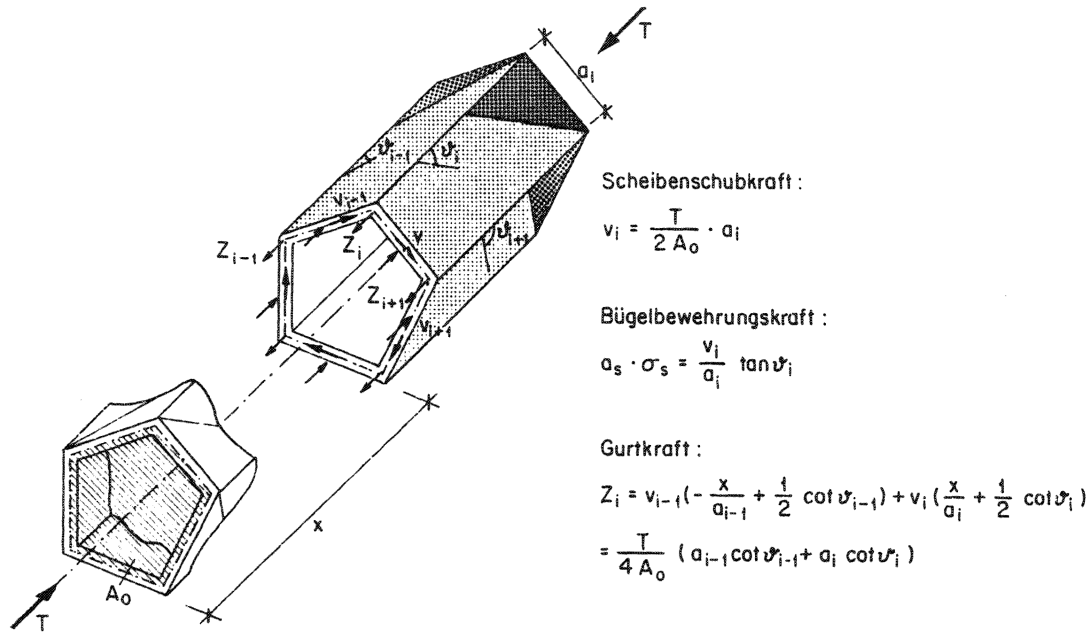


Bild 2.51: Herleitung der Bemessungsgleichungen

Im weiteren wird ein Träger unter konstant verteilter Torsionsbeanspruchung untersucht (Bild 2.52). Da die Lasten in Komponenten zerlegt werden müssen, die in den Scheibenebenen wirken, und da nicht überall Querscheiben vorhanden sind, werden die Längsscheiben zusätzlich auf Querbiegung beansprucht.

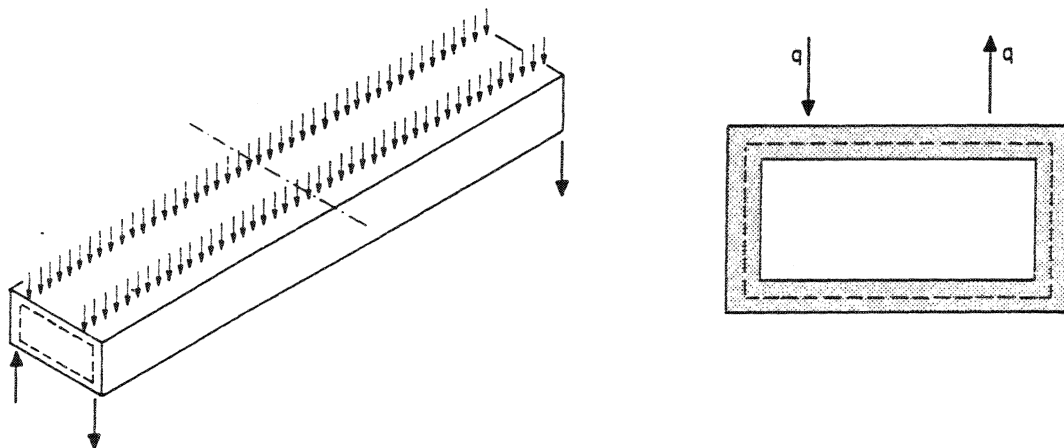


Bild 2.52: Geschlossener Querschnitt; System und Belastung

Die auf die einzelnen Scheiben wirkenden Kräfte sowie die zugehörigen Spannungsfelder sind im Bild 2.53 dargestellt.

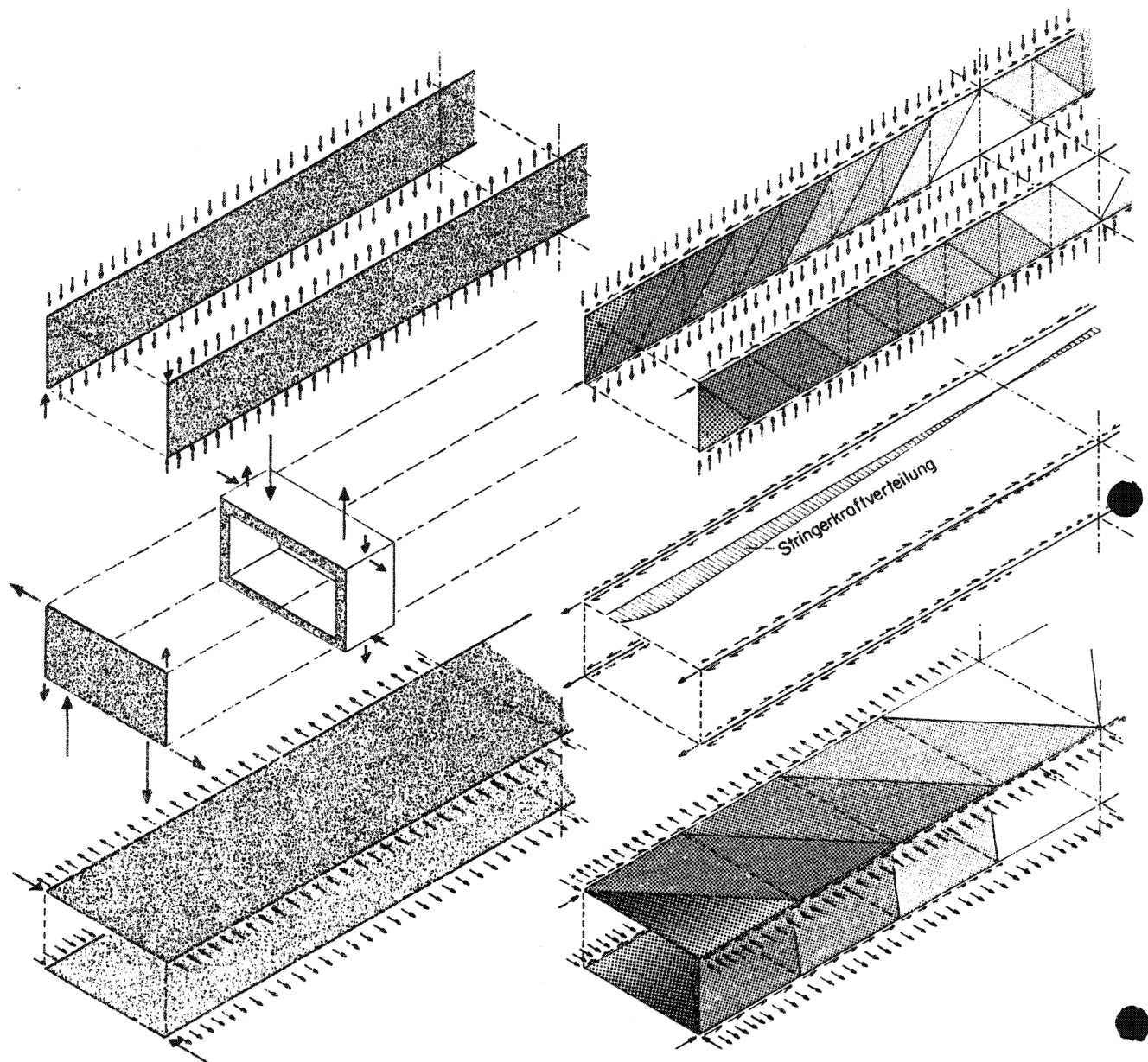


Bild 2.53: Beanspruchung und Spannungsfelder der Scheiben

Aus Bild 2.53 geht hervor, wie die Scheiben zusätzlich auf Biegung beansprucht sind. Im Kapitel 5 wird gezeigt, dass das Zusammenwirken von Querbiegung und Schub in den einzelnen Scheiben das dargestellte Spannungsfeld nicht stark beeinflusst.

## 2.5 Konsolen

Konsolen sind in der Regel gekennzeichnet durch eine sehr kleine Schlankheit, so dass eine direkte Lastabtragung zwischen Lasteinleitung und Auflager möglich ist. Im Bild 2.54 sind Lösungen für eine Konsole sowohl unter Einzellast als auch unter verteilter Last angegeben.

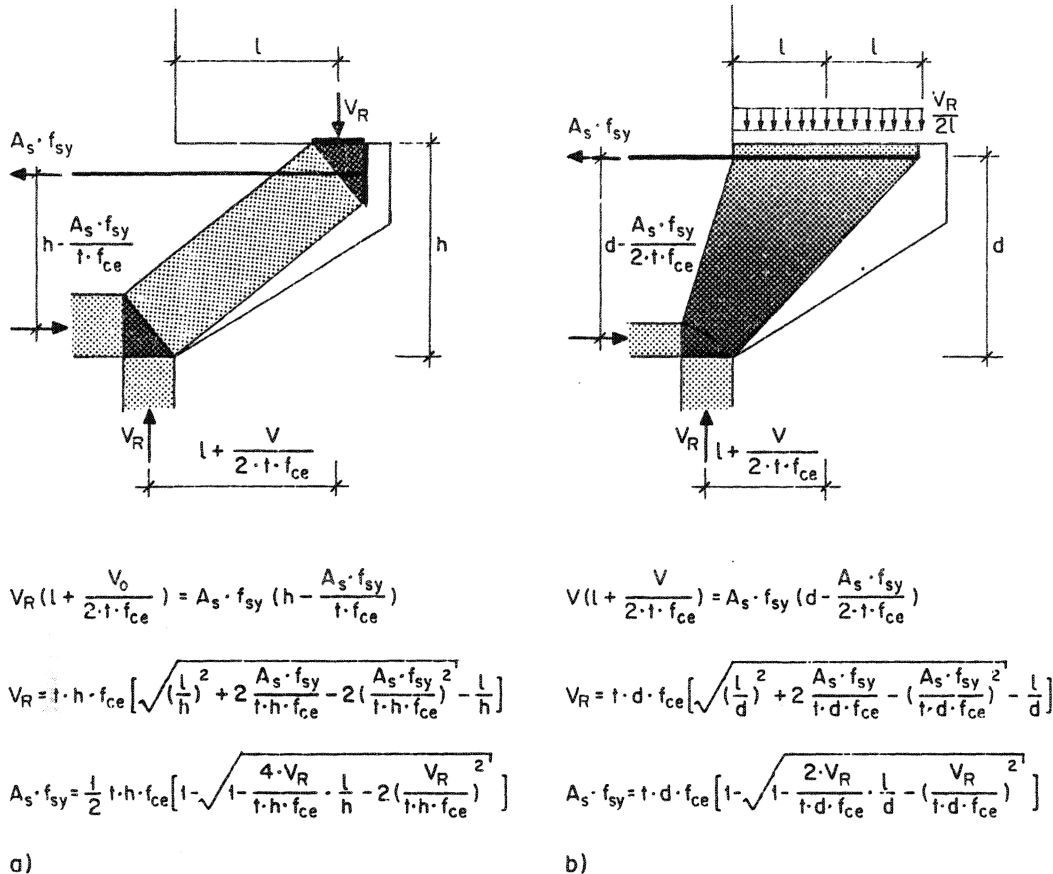


Bild 2.54: Spannungsfelder mit Bemessungsgleichungen für Konsolen

Auch hier ist für eine praktische Bemessung die Kenntnis des qualitativen Verlaufs der Spannungsfelder ausreichend. Mit den angegebenen Bemessungsgleichungen können die Stärke und die Lage der statisch erforderlichen Bewehrung ermittelt werden. Diese Bewehrung muss entweder hinter der Lasteinleitung (Bild 2.54a) oder im Lasteinleitungsbereich über Verbundspannungen (Bild 2.54b) voll verankert werden.

## 2.6 Verbindungsträger

Verbindungsträger sind vorwiegend an beiden Enden beanspruchte Balken (Bild 2.55).

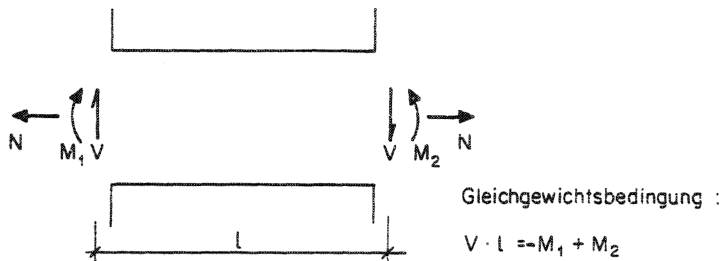


Bild 2.55: System und Belastung

Der Spezialfall mit  $N = 0$  und  $M_1 = 0$  entspricht den im Abschnitt 2.2 behandelten Beispielen. Auch hier kann bei einer kleinen Schlankheit die Querkraft direkt aufgenommen werden (Bild 2.65a). Der allgemeine Fall lässt sich einfach entwickeln, indem zusätzlich horizontale Zug- und Druckkräfte eingeführt werden (Bild 2.56c).

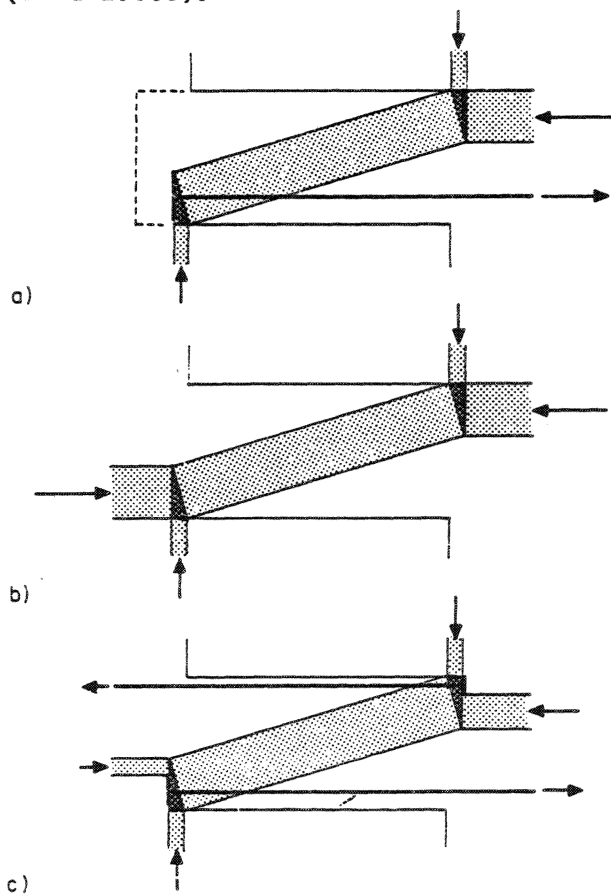
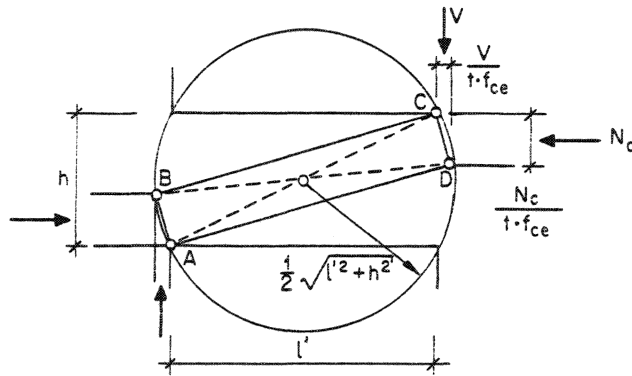


Bild 2.56: Spannungsfelder

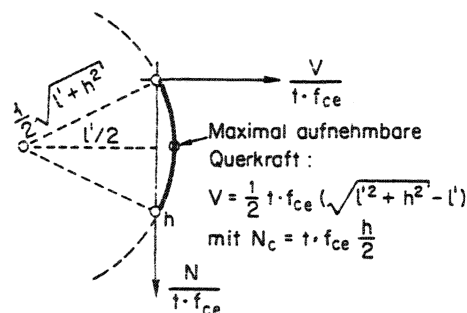
Wie Bild 2.57a zeigt, lassen sich diese Felder geometrisch einfach konstruieren. Da die geneigte Druckstrebe rechteckförmig ist, sind die Punkte B und D auf einem Kreis durch A und C gelegen. Aus diesem Sachverhalt lässt sich die Querkraft als Funktion der Horizontalkräfte analytisch ermitteln (Bild 2.57b).



a)

$$\left(\frac{l'}{2} + \frac{V}{t \cdot f_{ce}}\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{N_c}{t \cdot f_{ce}}\right)^2 = \left(\frac{l'}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$V = t \cdot f_{ce} \left[ \sqrt{\left(\frac{l'}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{N_c}{t \cdot f_{ce}}\right) - \frac{l'}{2} \right]$$



b)

Bild 2.57: Geometrische Konstruktion des Spannungsfeldes und  $V-N_c$ -Interaktion

Bei grosser Schlankheit resultiert eine flache Druckstrebe. Ist keine auf Zug beanspruchte Längsbewehrung vorhanden (Bild 2.56b), so kann sich dieses Feld einstellen. Verläuft hingegen die Druckstrebe über eine längere Strecke in der Nähe einer horizontalen Zugbewehrung (Bilder 2.56 a und c), so ist die Kraftübertragung im Beton problematisch (s. Kapitel 3 und 4). In diesen Fällen muss die Last, wie im Abschnitt 2.2.4 gezeigt wurde, indirekt abgetragen werden (Bild 2.58a). Bei Trägern mit mittlerer Schlankheit können die zwei Tragwirkungen kombiniert werden (Bild 2.58b).

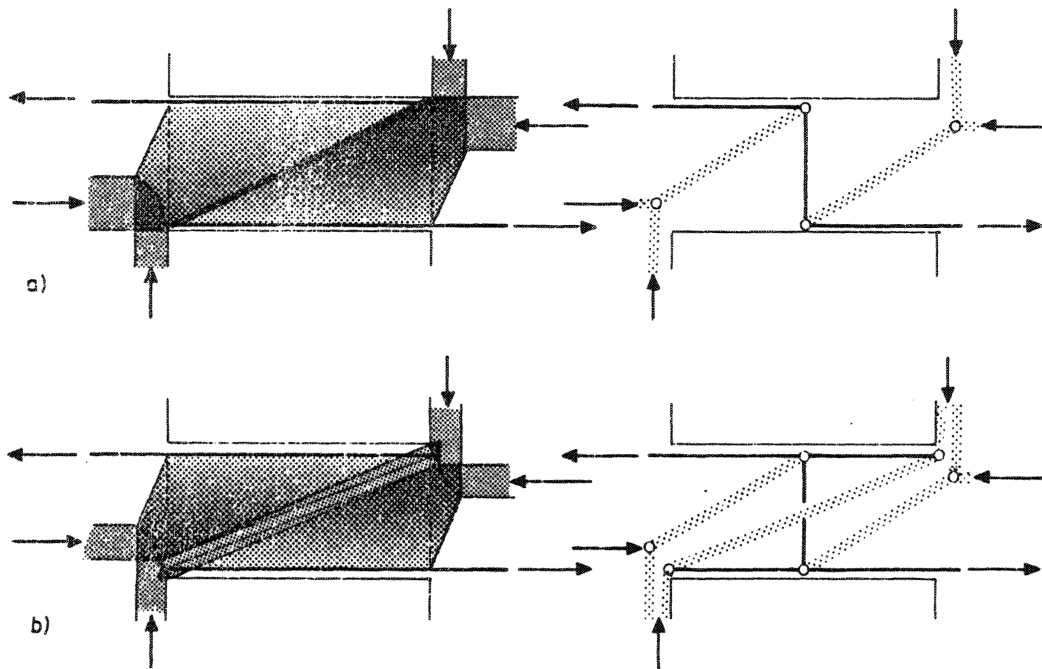


Bild 2.58: Spannungsfelder und Lage der Resultierenden

## 2.7 Rahmenknoten

### 2.7.1 Rahmenecke; Druck innen

Gegeben sei die im Bild 2.59 dargestellte Rahmenecke.

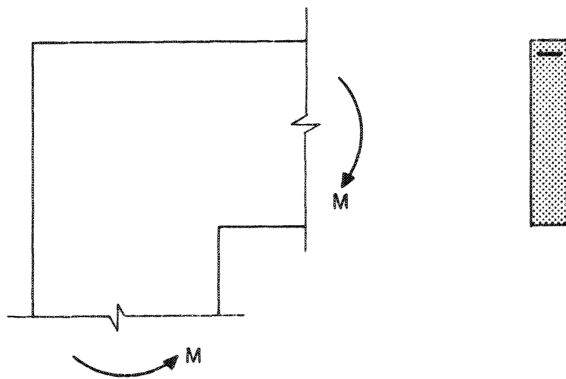


Bild 2.59: Abmessungen und Beanspruchung

Der Knoten ist durch reine Biegung beansprucht. Ähnliche Fälle mit Beanspruchung durch Querkraft und Normalkraft werden am Schluss dieses Abschnittes behandelt. Die Abmessungen des Druckgurtes sowie die Bewehrungskraft der einzelnen Träger können aus einer einfachen Biegebemessung ermittelt werden (Bild 2.60a). Im Knotenbereich treffen die Druckgurte zusammen, sie sind im Gleichgewicht mit einer diagonalen Druckstrebe (Bild 2.60b). Ähnliches geschieht mit der Bewehrungskraft, die auch mit einer geneigten Druckstrebe umgelenkt wird (Bild 2.60c). Da die Intensitäten der Druck- und Zugkräfte identisch sind, ergeben sich gleiche Intensitäten an den beiden Rändern der geneigten Druckstrebe. Das vollständige Spannungsfeld ist im Bild 2.60d dargestellt.

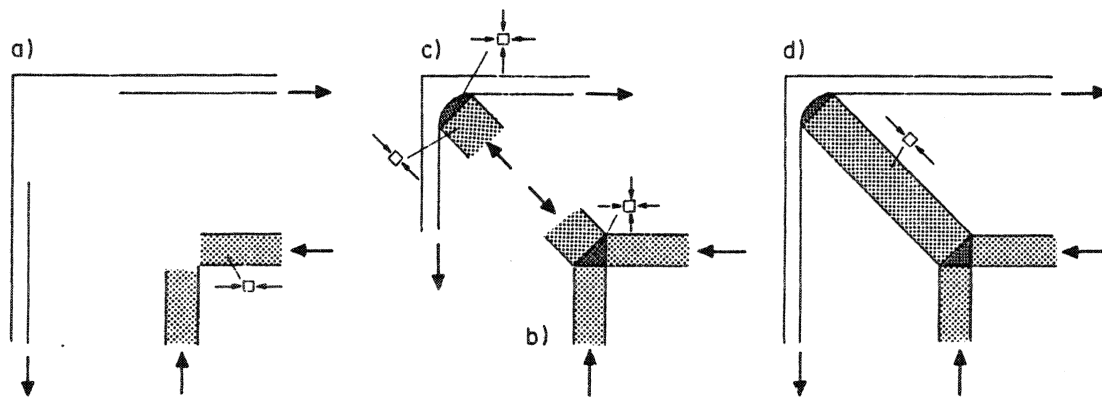


Bild 2.60

Im Bild 2.61 ist die Umlenkung der Bewehrungskraft im Detail dargestellt.

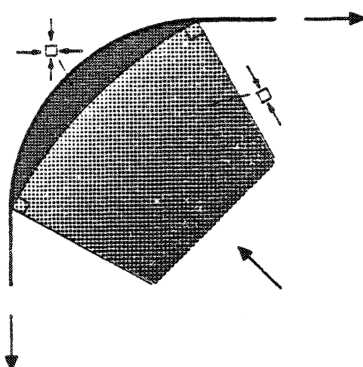


Bild 2.61: Umlenkung der Bewehrungskraft

Der Bereich zwischen der Bewehrung und der Druckstrebe ist theoretisch zweiachsig beansprucht, weil die Bewehrung kreisförmig gebogen ist. Für eine praktische Bemessung ist dies jedoch nicht von Bedeutung.

Es ist zu bemerken, dass diese Herleitung nicht nur für symmetrische Fälle gültig ist. Bild 2.62 zeigt ein Spannungsfeld für eine Rahmenecke, bei welcher die zwei Träger unterschiedliche Höhen aufweisen.

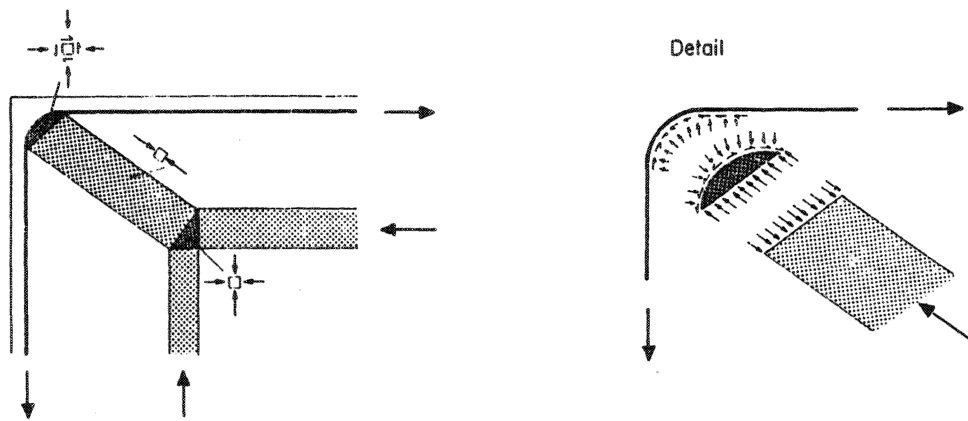


Bild 2.62: Spannungsfeld für Träger mit ungleicher statischer Höhe

Bei der Umlenkung der Bewehrungskraft resultiert in diesem Fall auch eine Haftspannung zwischen der Druckstrebe und der Bewehrung. Das Gleichgewicht ist nur streng erfüllt für eine bestimmte Bewehrungsführung, die im Umlenkbereich nicht mehr kreisförmig ist. Dies kann bei extremen Verhältnissen (kleine Druckstrebenneigung und grosser Krümmungsradius der Bewehrung im Vergleich zur kleinen statischen Höhe) zu Problemen führen.

Das Spannungsfeld der untersuchten Rahmenecke mit reiner Biegebeanspruchung kann verallgemeinert werden, indem zusätzlich Normalkräfte und Querkräfte eingeführt werden. Bild 2.63 zeigt qualitativ zwei solche Fälle.

Es ist zu beachten, dass auch in diesen Fällen die statisch erforderlichen Bewehrungen mit der Schnittbetrachtungsweise ermittelt werden können.



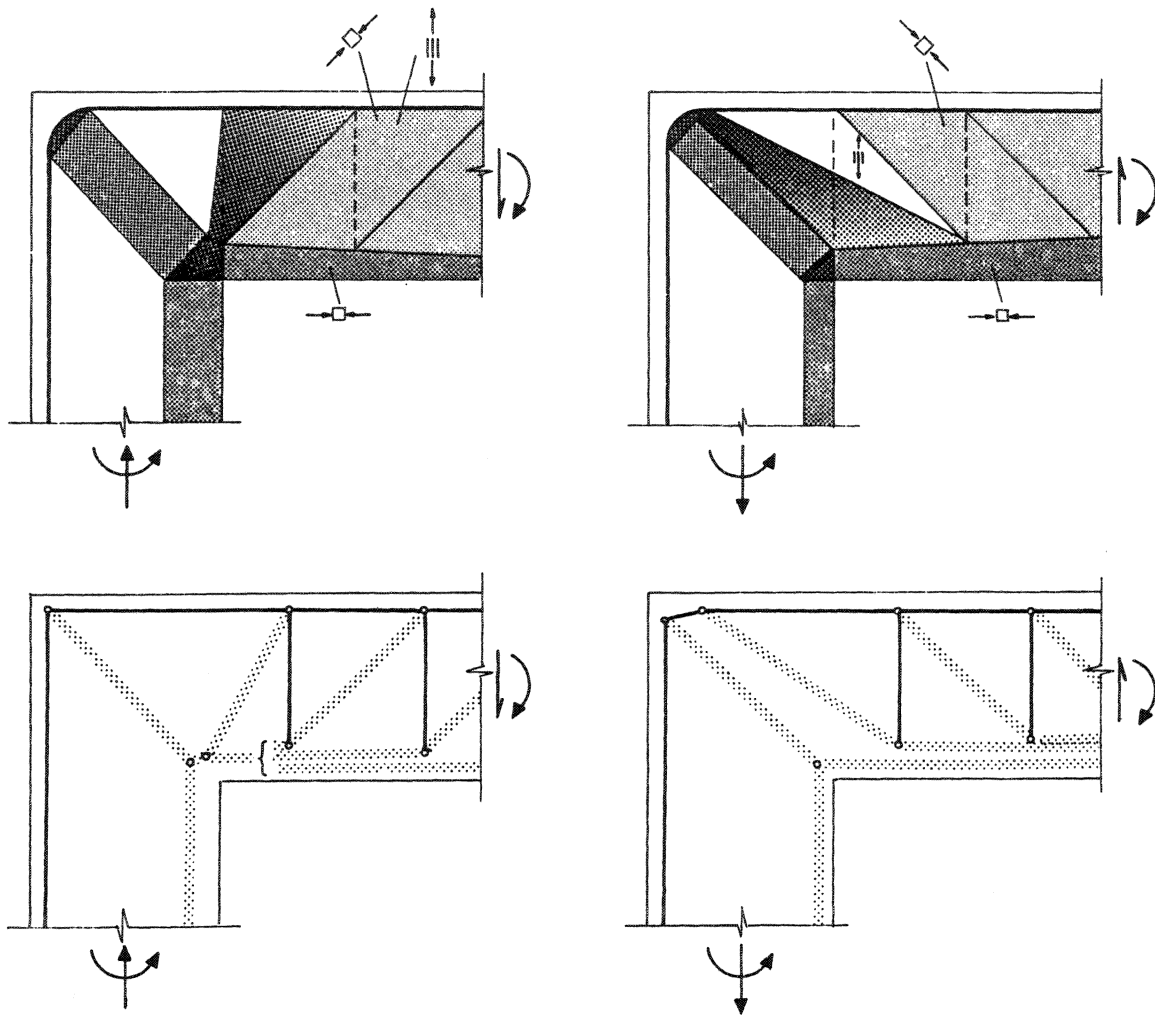


Bild 2.63: Spannungsfelder mit Berücksichtigung von Normal- und Querkraften

### 2.7.2 Rahmenecke; Zug innen

Das Spannungsfeld für derartig beanspruchte Rahmenecken kann aus Abschnitt 2.7.1 übernommen werden. Die Zugglieder sind durch Druckstreben zu ersetzen und umgekehrt (Bild 2.64a).

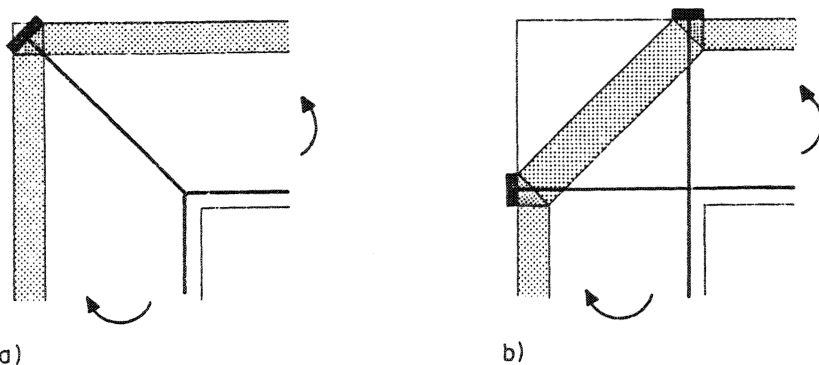


Bild 2.64: a) einfache Umlenkung, b) doppelte Umlenkung der Druckstrebe

Im Bild 2.64b ist eine alternative Lösung mit doppelter Umlenkung der Druckstrebe dargestellt. Es ist zu bemerken, dass die Umlenkung der Druckstrebe bis zur Betonoberfläche erfolgen muss. Dies kann konstruktiv nur mit extern angebrachten Verankerungsplatten gelöst werden. Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass praktisch alle anderen Bewehrungsanordnungen (ohne Mithilfe zusätzlicher Bewehrungsstäbe) wegen der problematischen Verankerungsverhältnisse zu unbefriedigenden Resultaten führen. Der Einfluss der Bewehrungsführung bei Detailproblemen wird im Kapitel 3 diskutiert. Diese Problematik wird entschärft, wenn nicht die ganze Umlenkung der Druckstrebe am äusseren Rand des Trägerknotens erfolgen muss. Bild 2.65 zeigt eine derartige Lösung mit einer zusätzlichen Umlenkung der Druckstrebe mit Hilfe einer schrägen Bewehrung.

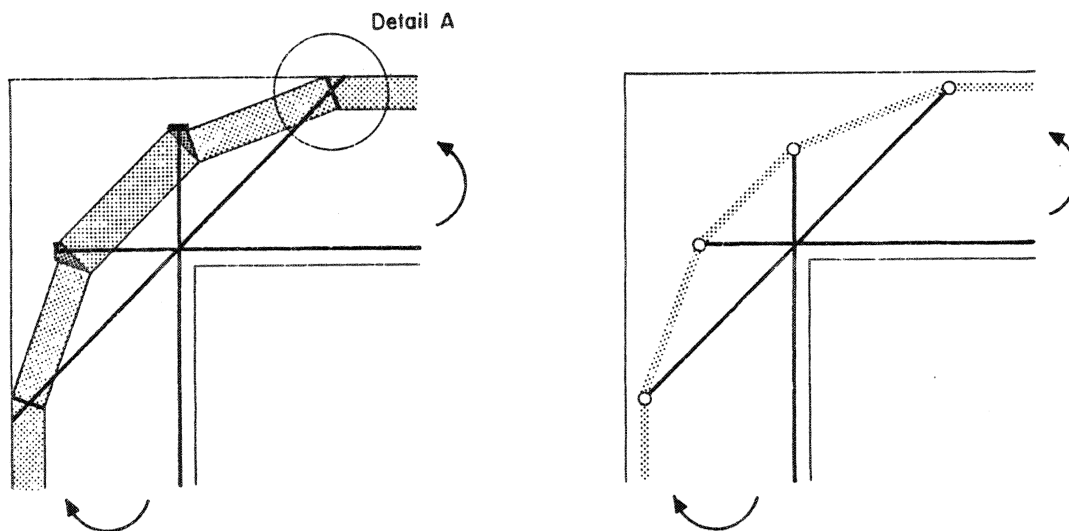


Bild 2.65: Spannungsfeld und Resultierende (mehrfache Umlenkung)

Die Umlenkung im Detail A erfolgt analog Bild 2.37.

Eine weitere Möglichkeit, die Problematik der konzentrierten Umlenkung zu umgehen, besteht in der Anordnung einer verteilten Bügelbewehrung. Damit kann die Druckstrebe kontinuierlich umgelenkt werden (Bild 2.66a).

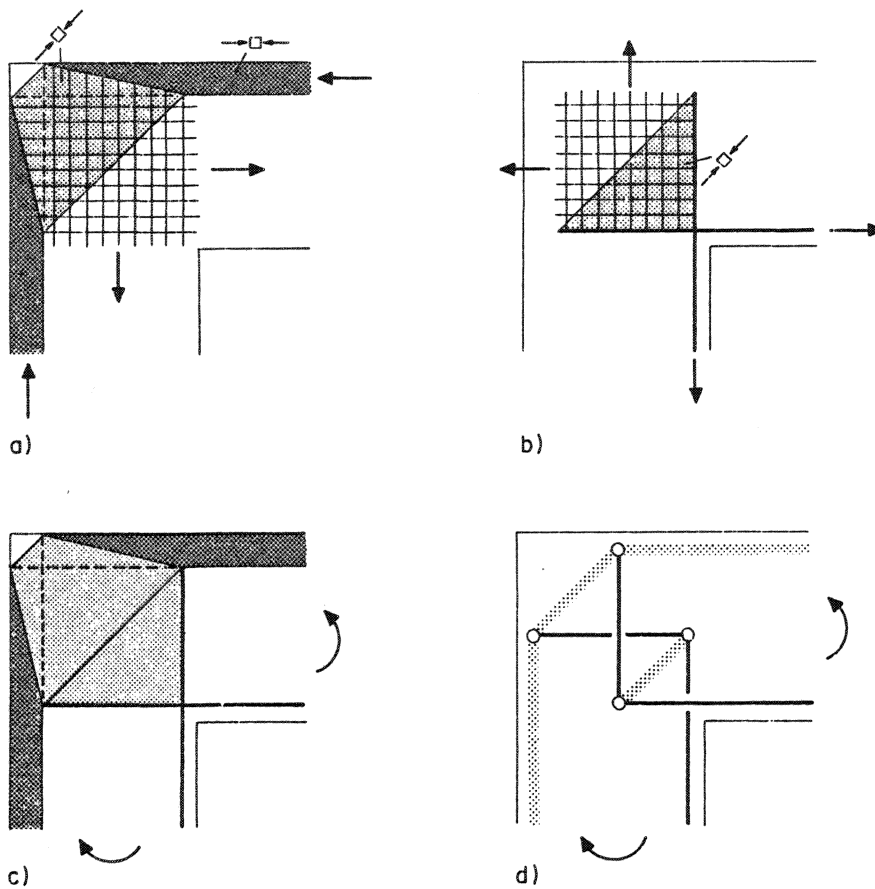


Bild 2.66: Bügelbewehrung und Knotenbereich

Die Bügelkräfte müssen dann in die Hauptbewehrung eingeleitet werden (Bild 2.66b). Das definitive Spannungsfeld und die zugehörigen Resultierenden sind in den Bildern 2.66c und 2.66d dargestellt.

Das Bild 2.67 zeigt eine mögliche Kombination der Spannungsfelder nach Bild 2.64b und Bild 2.66.

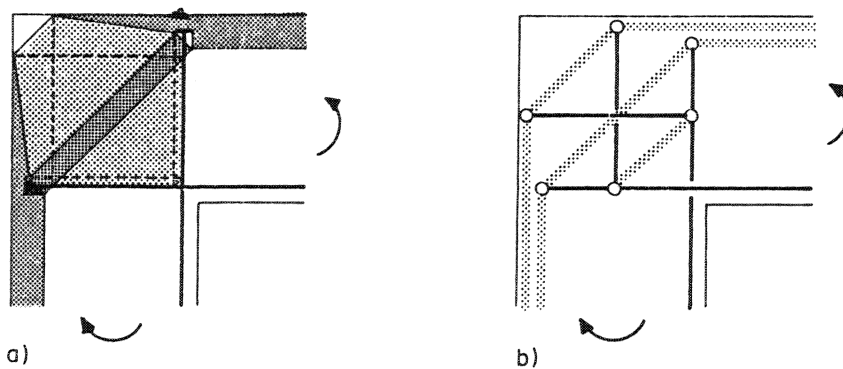


Bild 2.67: Spannungsfeld und Resultierende

Die Anpassung des Spannungsfeldes des Bildes 2.65 infolge Einführung von Normal- und Querkraften ist im Bild 2.68 dargestellt.

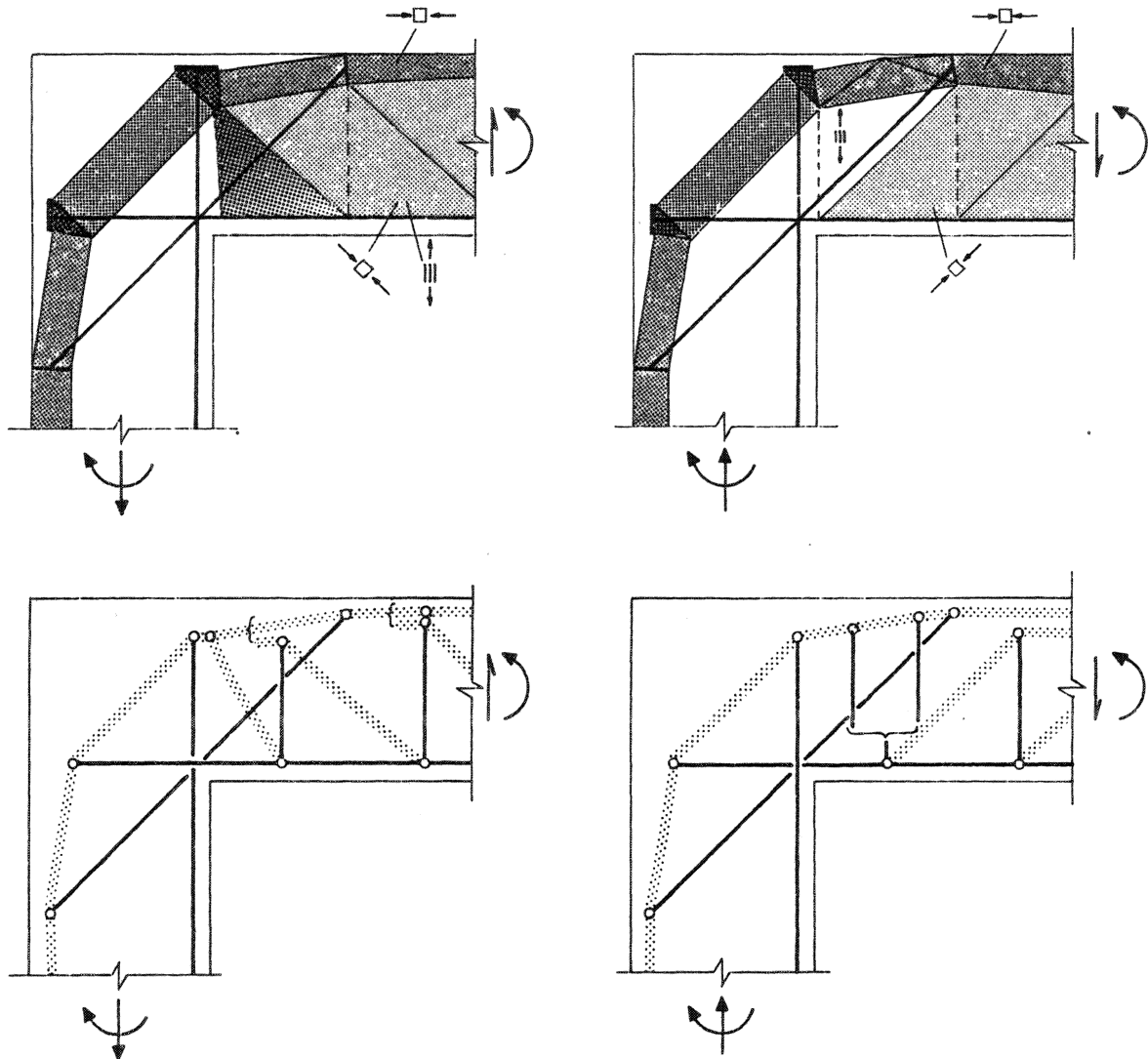


Bild 2.68: Spannungsfelder mit Berücksichtigung von Normal- und Querkraften

Im Bild 2.69 sind Bewehrungsskizzen dargestellt, die den Spannungsfeldern der Bilder 2.64b, 2.65 und 2.66 entsprechen.

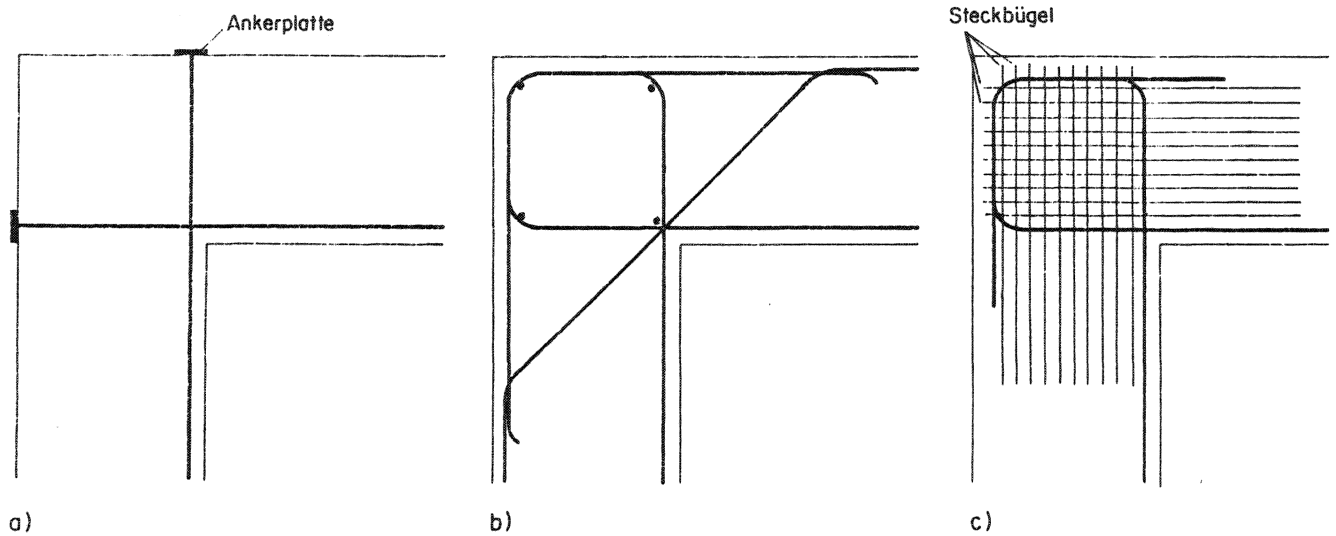


Bild 2.69: Bewehrungsskizzen

### 2.7.3 Rahmenknoten mit drei aneinanderstossenden Trägern

Die Ausführungen beschränken sich in diesem Abschnitt auf Rahmenknoten mit reiner Biegebeanspruchung. Eventuell vorhandene Quer- und Normalkräfte beeinflussen die Spannungsfelder in ähnlicher Weise wie bei den behandelten Rahmenecken. Die drei möglichen Beanspruchungsarten sind im Bild 2.70 dargestellt.

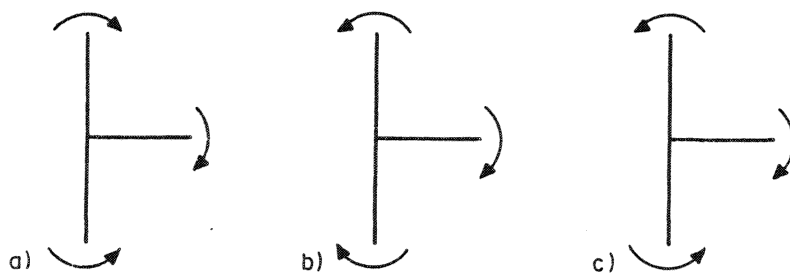


Bild 2.70: Beanspruchungsarten

Eine qualitative Untersuchung der inneren Kräfte mit Hilfe von Resultierenden führt zu den im Bild 2.71 dargestellten Lösungen.

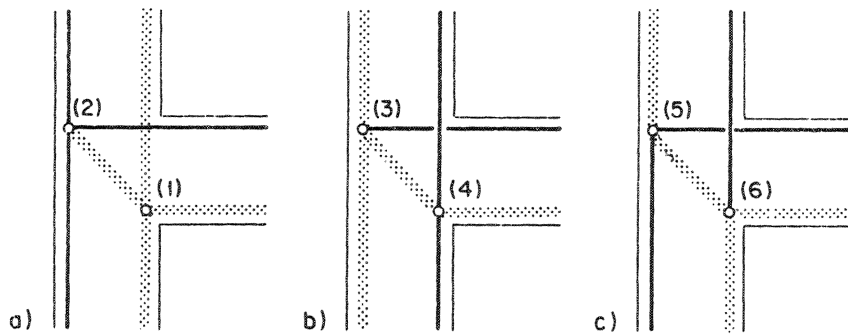


Bild 2.71: Resultierende

Nach der Festlegung der Abmessungen der Druckstreben beschränkt sich die Entwicklung der Spannungsfelder auf die Ausbildung der Strebenknotenbereiche. Im Bild 2.72 sind mögliche Lösungen dargestellt.

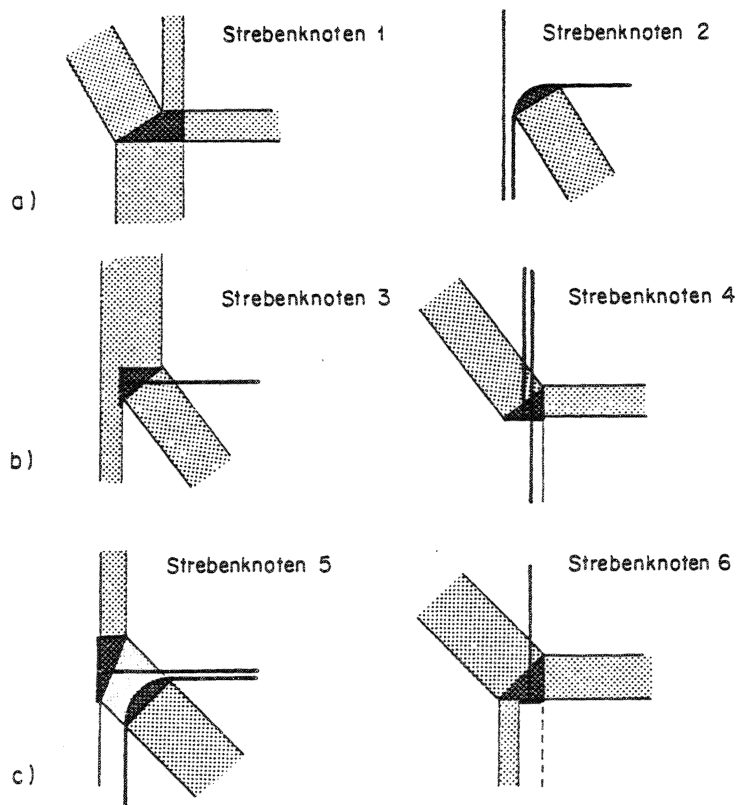


Bild 2.72: Strebenknoten

Die Strebenknoten 1, 2 und 4 stellen in statischer Hinsicht keine Probleme dar. Bei den Strebenknoten 3 und 5 treten die gleichen Verankerungsschwierigkeiten auf wie bei der im Abschnitt 2.7.2 behandelten Rahmenecke mit Zug innen. Im Strebenknoten 5 wird ein Teil der Kraft in der geneigten Strebe durch die Umlenkung der Bewehrung aufgenommen. In der Verlängerung der Druckstrebe wird somit die Spannung auf  $\lambda \cdot f_{ce}$  reduziert, so dass im oberen zweiachsig beanspruchten Bereich eine Hauptspannung kleiner als  $f_{ce}$  ist. Beim Strebenknoten 6 muss entweder die vertikale Bewehrung oder die vertikale Druckstrebe (unter der Voraussetzung, dass die Spannungsintensität  $f_{ce}$  beträgt) nach links verschoben werden, da sonst eine Ueberbeanspruchung des zweiachsig beanspruchten Bereichs resultieren würde. Die vollständigen Spannungsfelder sind im Bild 2.73 dargestellt.

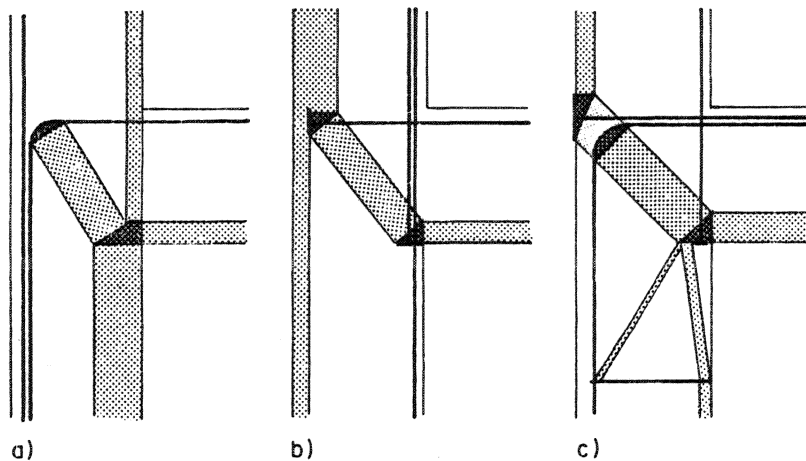


Bild 2.73: Spannungsfelder

Bei den Rahmenknoten b) und c) kann das Problem der Verankerung des horizontalen Bewehrungsstabes entschärft werden, indem wie bei der Rahmenecke mit Zug innen eine geneigte Bewehrungslage oder eine vertikale Bügelbewehrung (Bilder 2.65 und 2.66) angeordnet werden. Wie das Spannungsfeld für den Rahmenknoten c) zeigt, hat die nicht volle Ausnützung der statischen Höhe beim unteren Träger einen derart geringen Einfluss auf die erforderlichen Bewehrungen, dass dieser Effekt bei einer praktischen Bemessung vernachlässigt werden kann.

#### 2.7.4 Rahmenknoten mit vier aneinanderstossenden Trägern

Auch für diese Rahmenknoten gelten die Ueberlegungen, die für diejenigen mit zwei oder drei aneinanderstossenden Trägern beschrieben wurden. Im Bild 2.74 sind die drei möglichen Beanspruchungsarten und die Resultierenden der inneren Kräfte dargestellt.

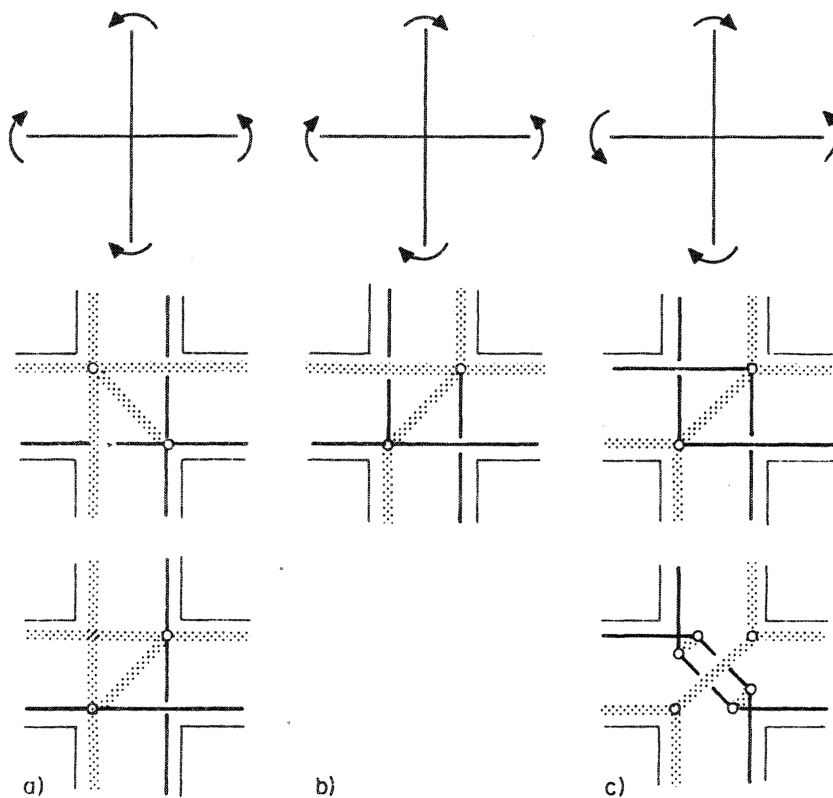


Bild 2.74: Beanspruchungsarten und Resultierende der inneren Kräfte

Im allgemeinen kann bei der Bemessung von Rahmenecken und Rahmenknoten wie folgt vorgegangen werden:

- Untersuchung des Verlaufs der inneren Kräfte mit Hilfe der Resultierenden.
- Ermittlung der erforderlichen Bewehrungsquerschnitte. Die Bewehrungskräfte ergeben sich normalerweise aus denjenigen der angrenzenden Balken.
- Untersuchung der Details (Strebenknoten) mit Spannungsfeldern.
- Konstruktive Ausbildung der Bewehrung.



## 2.8 Wände

In diesem Abschnitt beschränken sich die Untersuchungen auf einige typische Scheibenprobleme. Einfache, nur vertikal belastete Wände sind im Abschnitt 2.2 als gedrungene Balken behandelt worden. Bild 2.75 zeigt einige dieser Wände.

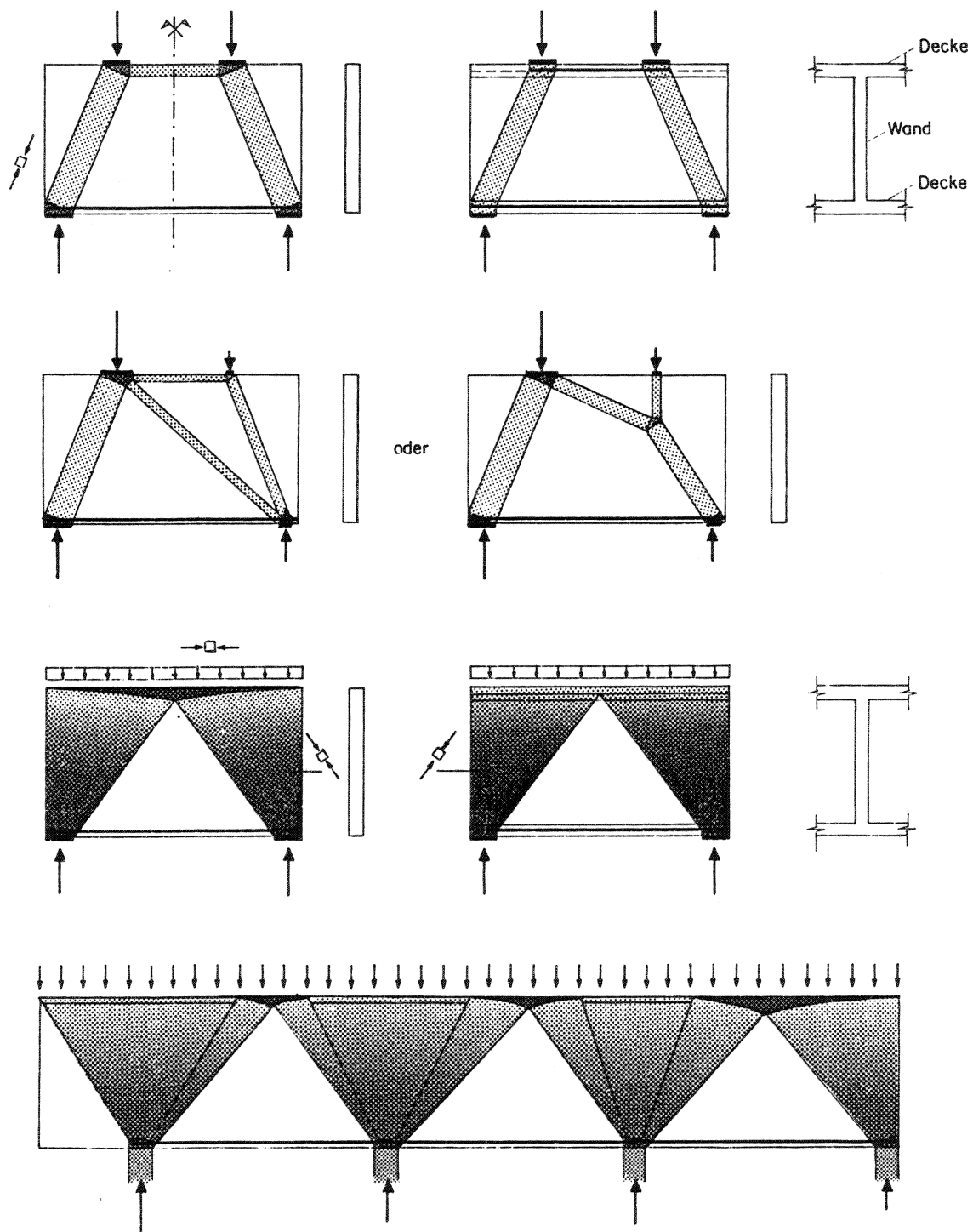


Bild 2.75: Einfach belastete Wände

Bei monolithisch an die Decken angeschlossenen Wänden können die Decken als Gurtplatten ausgenützt werden.

Im weiteren werden typische Bemessungsfälle von Schubwänden untersucht. Solche Wände sind im Hochbau üblicherweise durch horizontale Kräfte (Wind, Erdbeben) und vertikale Kräfte (Eigengewicht, Nutzlast) beansprucht. Bild 2.76 zeigt Wände, die nur auf Schub beansprucht sind. Die vertikale Bewehrung kann grundsätzlich verteilt oder konzentriert angeordnet werden. Auch im Fall einer verteilten Vertikalbewehrung ist im allgemeinen am oberen Rand eine horizontale Bewehrung (Gurt) erforderlich (Bild 2.76 c).

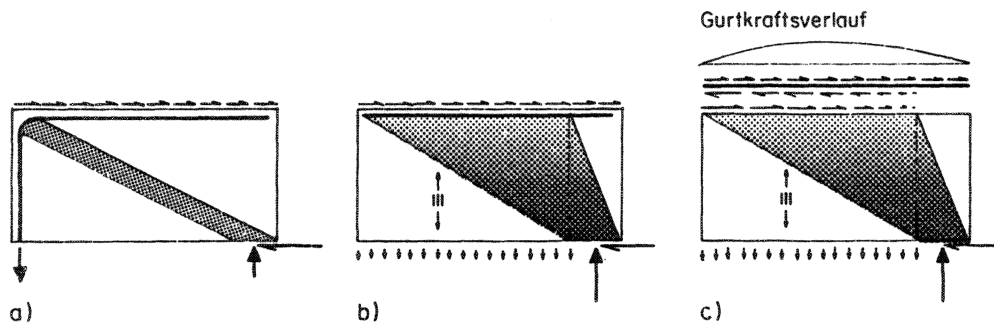


Bild 2.76: Schubwände ohne vertikale Belastung

Falls eine vertikale Last vorhanden ist, kann diese die vertikale Bewehrung zum Teil oder ganz kompensieren (Bild 2.77).

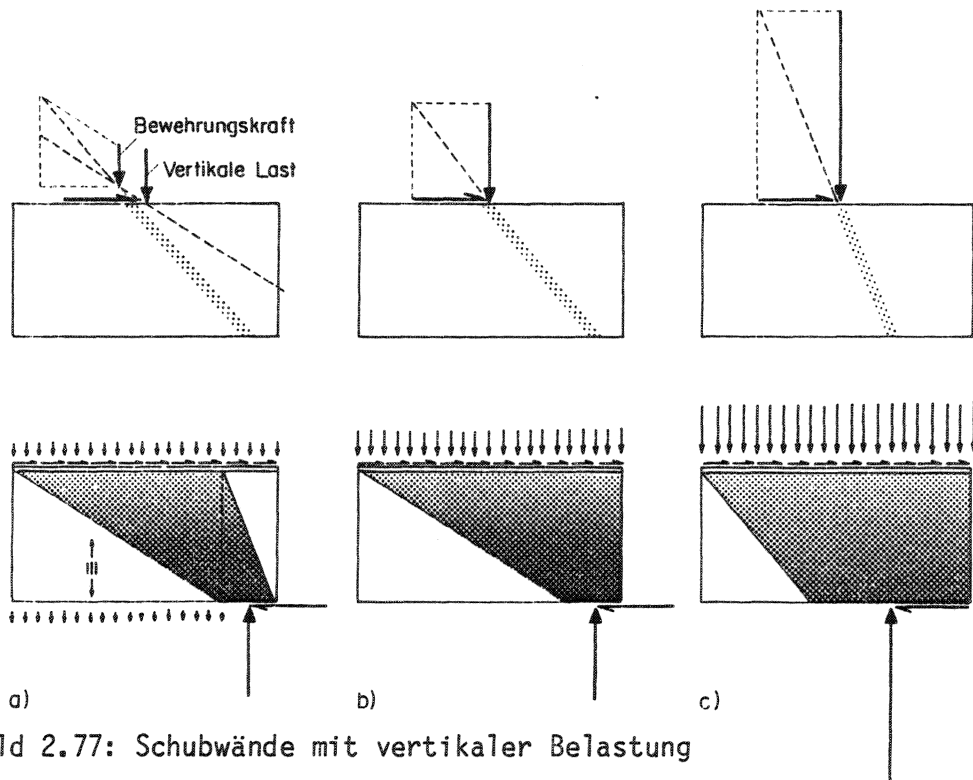


Bild 2.77: Schubwände mit vertikaler Belastung

Bild 2.77 b) zeigt einen Grenzfall, bei dem keine vertikale Bewehrung erforderlich ist. Die Lage der Resultierenden der äusseren Lasten am unteren Rand ist so bestimmt worden, dass in diesem Bereich die Betonfestigkeit gerade ausgenutzt ist. Bei der im Bild 2.77 a) dargestellten Scheibe wird mit einer vertikalen Bewehrungskraft die innere Resultierende so beeinflusst, dass dieser Zustand erreicht wird. Ähnliche Ueberlegungen gelten, wie Bild 2.78 zeigt, auch für mehrstöckige Schubwände.

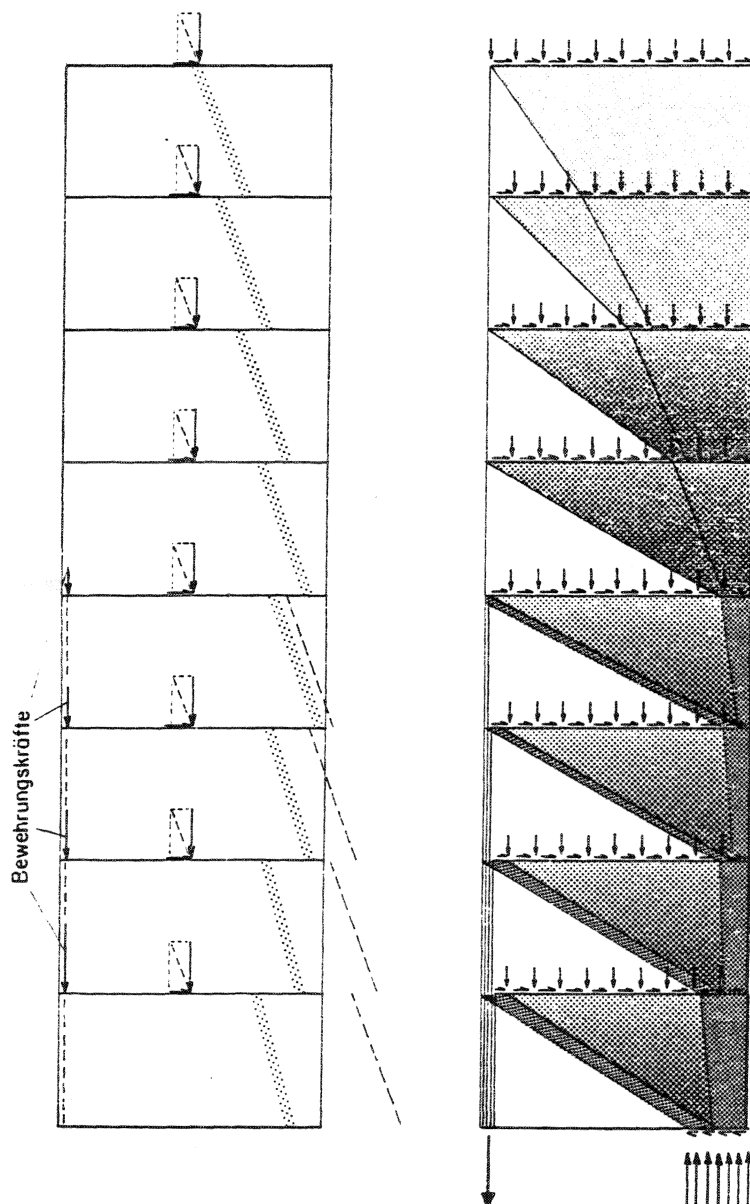
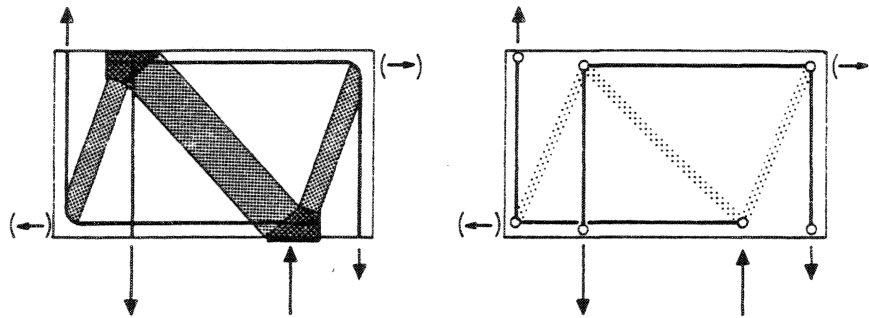
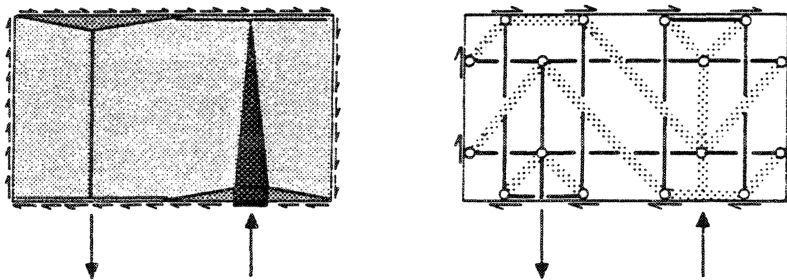


Bild 2.78: Mehrstöckige Schubwand: Resultierende und Spannungsfeld

Im Abschnitt 2.4 wurden Torsionsträger behandelt, bei denen die Lasten und die Auflagerkräfte über Querscheiben eingeleitet wurden. Im Bild 2.79 sind die inneren Beanspruchungen solcher Tragelemente mit Spannungsfeldern dargestellt.



a) Wölbtorsion (ohne horizontale Last)  
Umlauftorsion (mit horizontaler Last)



b) Umlauftorsion, verteilte Einleitung des Schubflusses

Bild 2.79: Querscheiben

### 3. MATERIALEIGENSCHAFTEN UND -FESTIGKEITEN

#### 3.1 Bewehrungsstahl

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die herkömmlichen Arten Bewehrungsstahl sind im Bild 3.1a dargestellt.

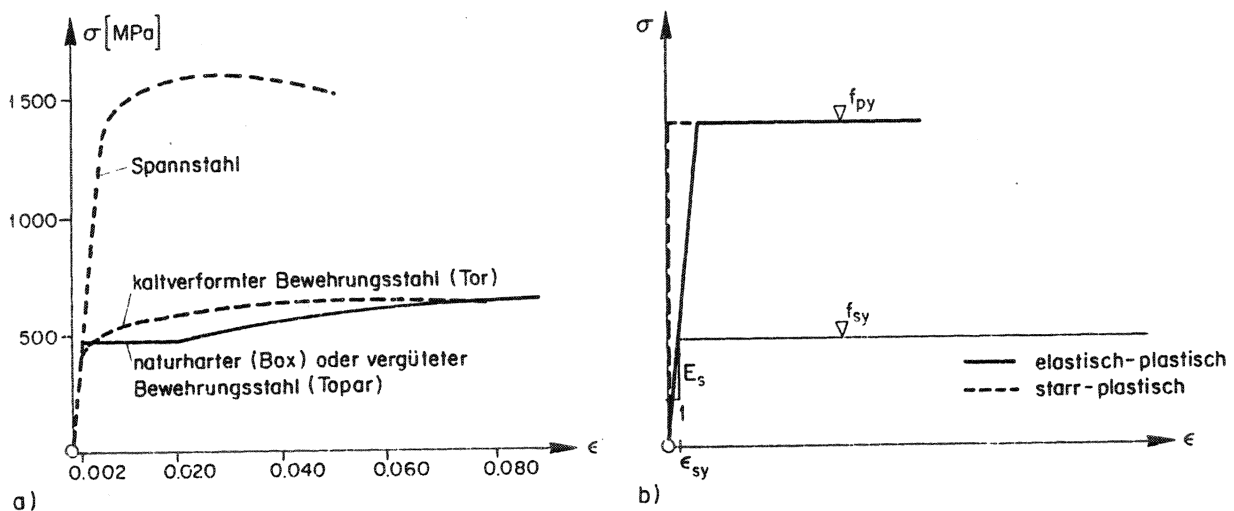


Bild 3.1: Tatsächliche und vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Im allgemeinen lassen sich drei verschiedene Bereiche unterscheiden:

- elastischer Bereich (Atomabstand nimmt proportional mit Zugbeanspruchung zu)
- plastischer Bereich (Verformung des Kristallgitters mit Schiebung in den Versetzungen)
- Verfestigungsbereich (Kombination der zwei Phänomene)

Für eine praktische Bemessung können die vereinfachten Spannungs-Dehnungs-Diagramme nach Bild 3.1b benützt werden. Die sehr grossen Verformungen im plastischen Bereich im Vergleich zur Fließdehnung  $\epsilon_{sy}$  erlauben die Anwendung der Plastizitätstheorie. Nimmt man an, dass die Bewehrungsstäbe nur Kräfte in ihrer Längsrichtung aufnehmen, so erübrigt sich die Berücksichtigung des allgemeinen mehrachsigen Spannungszustandes bei der Beschreibung der Fließbedingung für den Bewehrungsstahl.

### 3.2 Beton

Da der Beton im allgemeinen mehrachsig beansprucht ist, muss hier von einer Fließbedingung ausgegangen werden, die den allgemeinen Spannungszustand erfasst. Weil die unelastischen Verzerrungen nicht durch plastische Verformungen des Kristallgitters, sondern durch progressive irreversible Mikrozerstörung der inneren Struktur bedingt sind, wird die Betonfestigkeit zusätzlich durch verschiedene Phänomene, z.B. die Rissbildung, die Belastungsgeschichte, die Interaktion mit der Bewehrung, beeinflusst.

Obwohl ein Werkstoff mit solchen Merkmalen nicht als ideal plastisch bezeichnet werden kann, ist die Plastizitätstheorie im allgemeinen anwendbar, wenn für den Beton ein von diesen Phänomenen abhängiger Wert der effektiven Betonfestigkeit  $f_{ce}$  angesetzt wird. Es ist zu bemerken, dass bei unterbewehrten Tragelementen der Wert von  $f_{ce}$  einen relativ geringen Einfluss auf die Traglast hat.

#### 3.2.1 Einachsiger Spannungszustand

Einachsig beanspruchte Betonelemente können z.B. Druckzonen von Biegebalken und Platten, Stützen sowie Diagonalstreben gedrungener Elemente sein. Ein entsprechender Zustand kann experimentell im mittleren Bereich eines einachsig belasteten zylinderförmigen oder prismatischen Probekörpers erzeugt werden. Die Resultate eines solchen verformungsgesteuerten Versuchs sind im Bild 3.2 für drei Betonsorten dargestellt.

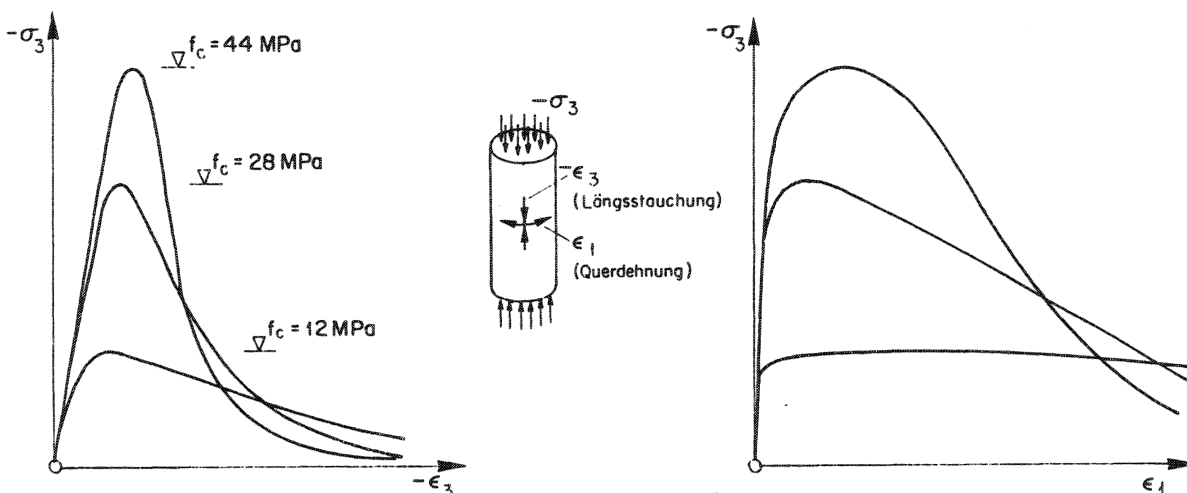


Bild 3.2: Spannung als Funktion der Längsstauchung und der Querdehnung für einachsig beanspruchten Beton

In den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen sind drei Bereiche festzustellen:

- Ein mehr oder weniger elastischer Bereich ( $0 \leq |\sigma_3| \leq 0.8 f_c$ ). Die Abweichung vom linear elastischen Verhalten ist u.a. bedingt durch die Öffnung von Mikrorissen zwischen den Zuschlagstoffen und der Zementmatrix. Das Verhältnis zwischen Quer- und Längsdehnungen (Poissonsche Zahl) ist in diesem Bereich etwa konstant und beträgt  $\sim 0.15$ .
- Ein Bereich mit grossen Querdehnungen, verfestigend ( $0.8 f_c \leq |\sigma_3| \leq f_c$ ). Ausgehend von den Mikrorissen zwischen Zementmatrix und Zuschlagkörnern bilden sich in der Zementmatrix Risse parallel zur Beanspruchungsrichtung (Bild 3.3). Die Längsstauchung und vor allem die Querdehnung nehmen überproportional zu.

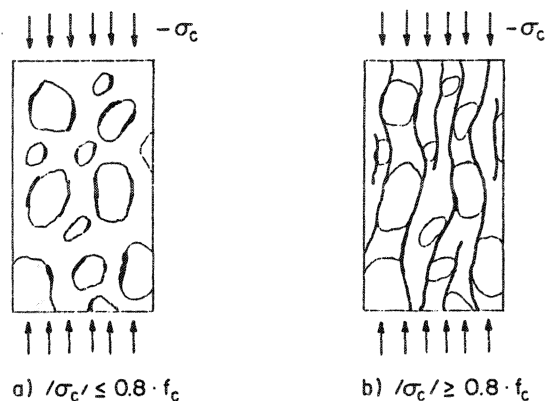


Bild 3.3: Rissbildung beim einachsigen Zylinderdruckversuch

- Ein Bereich mit grossen Querdehnungen, entfestigend. Der Beton ist in Lamellen aufgespaltet, die zum Teil instabil werden. Die Spannung nimmt mit zunehmender Verformung ab.

Damit die Traglast eines Systems mit der Plastizitätstheorie bestimmt werden kann, muss die Betonfestigkeit auf einen effektiven Wert  $f_{ce}$  reduziert werden. Wie Bild 3.4 zeigt, ist diese Reduktion von der Art des Systems abhängig. Im Bild 3.4a ist als Beispiel ein statisch bestimmtes System dargestellt. Da die Systemtraglast durch das Erreichen der Zylinderfestigkeit gegeben ist, kann in diesem Fall mit  $f_{ce} = f_c$  gerechnet werden.

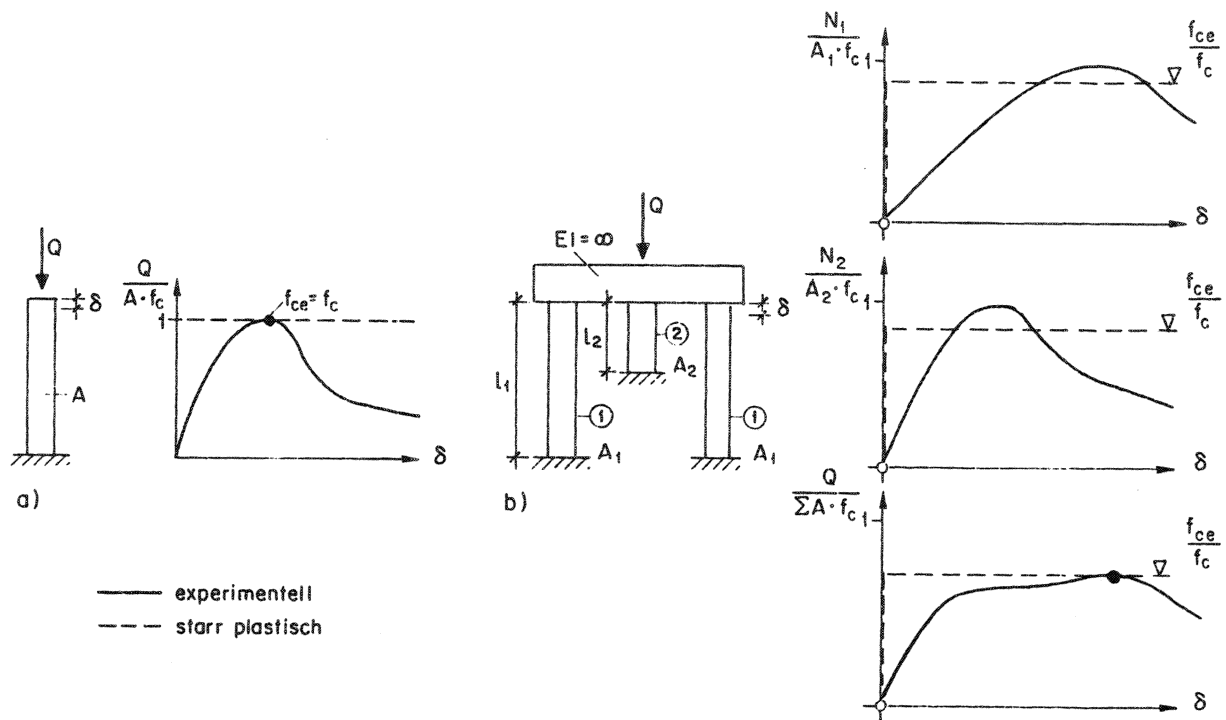


Bild 3.4: Verhalten eines statisch bestimmten und eines statisch unbestimmten Systems

Beim statisch unbestimmten System (Bild 3.4b) werden die Festigkeiten der verschiedenen Elemente nicht gleichzeitig, sondern bei unterschiedlichen Verformungen des Gesamtsystems erreicht. Aus diesem Grund lässt sich die Traglast des Systems nicht durch Addition der Traglasten der einzelnen Elemente ermitteln. Sie kann dagegen mit Hilfe der Plastizitätstheorie bestimmt werden, wenn die Betonfestigkeit reduziert wird ( $f_{ce} \leq f_c$ ). Diese Reduktion ist von der Art des Systems ( $A_1/A_2$ ,  $l_1/l_2$  im Beispiel gemäss Bild 3.4b) sowie von der Zylinderfestigkeit  $f_c$  abhängig. Die Zunahme der Sprödigkeit (grosse Entfestigung) mit der Zylinderfestigkeit gemäss Bild 3.2 kann berücksichtigt werden, indem für grosse Zylinderfestigkeiten die Festigkeit stärker reduziert wird. Bei üblichen System kann mit folgenden Werten gerechnet werden:

$$f_{ce} = f_c \quad \text{für } f_c \leq 20 \text{ MPa}$$

$$f_{ce} = 2.7 \cdot f_c^{2/3} \quad \text{für } f_c > 20 \text{ MPa}$$



Eine ähnliche Abhängigkeit ist auch von Exner [12] theoretisch hergeleitet worden:

$$f_{ce} = 3.2 \cdot f_c^{1/2}$$

Diese Beziehungen gelten für Systeme, deren Elemente Dehnungen in der gleichen Größenordnung aufweisen. In extremen Fällen muss hingegen die Festigkeit noch starker reduziert, oder sogar die Festigkeit der nicht aktivierbaren Elemente vernachlässigt werden.

### 3.2.2 Mehrachsiger Spannungszustand

Ein auf das im Bild 3.3 dargestellte Betonelement allseitig angreifender Querdruck wirkt der beschriebenen Rissbildung entgegen. Im Bild 3.5 ist das Verhalten eines derart beanspruchten Betonelementes aufgezeichnet. Die Querpressung kann aus einer äusseren Beanspruchung oder aus der Behinderung der Querdehnung (z.B. mit Umschnürungsbewehrung) entstehen.

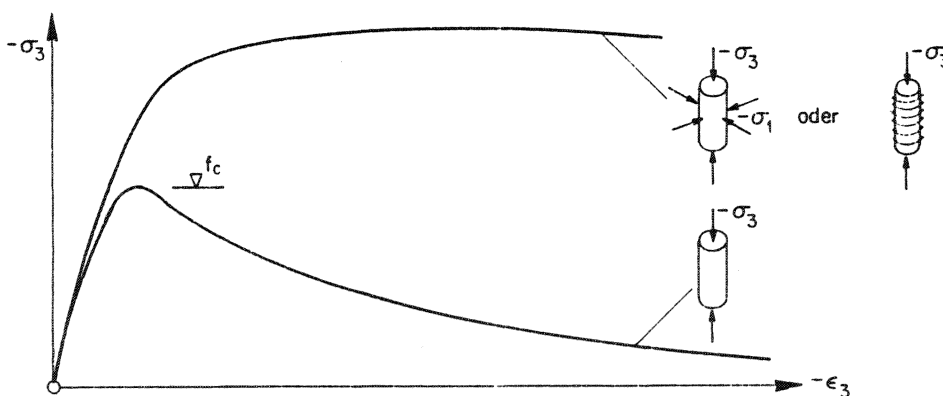


Bild 3.5: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für drei- und einachsigen beanspruchten Beton

Die Erhöhung der Festigkeit kann mit der Hypothese von Mohr-Coulomb beschrieben werden (Bild 3.6).

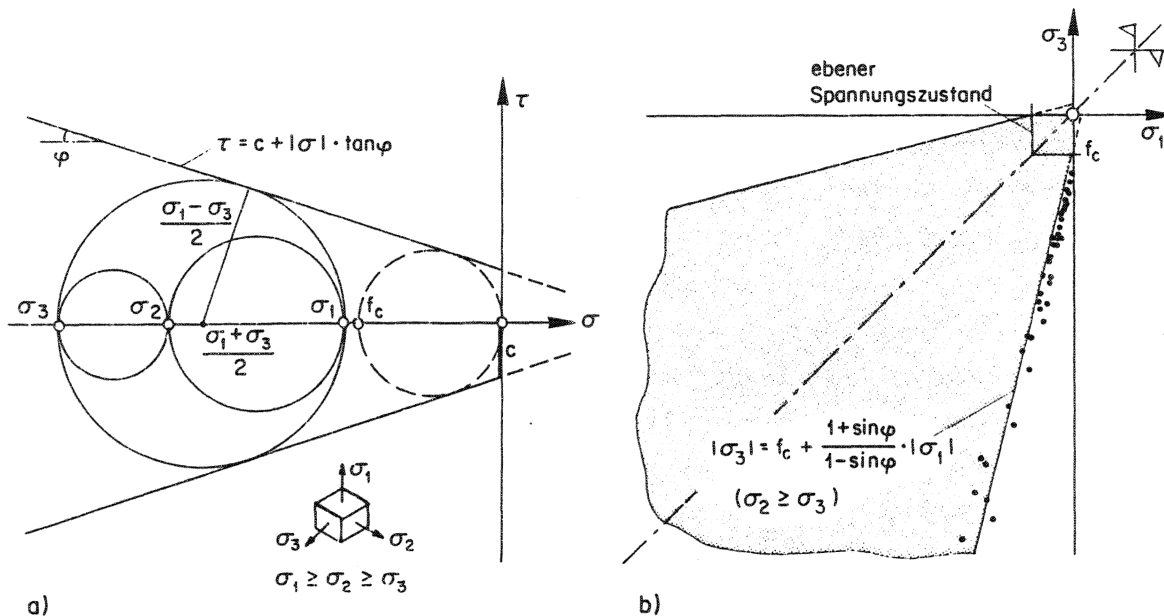


Bild 3.6: Fließbedingung von Mohr-Coulomb

a) Darstellung nach Mohr,

b) Hauptspannungsdarstellung und Versuchsergebnisse [13]

Wie ein Vergleich mit den im Bild 3.6b eingetragenen Versuchsergebnissen zeigt, kann mit  $\varphi \approx 37^\circ$  gerechnet werden. Die Zunahme der Festigkeit infolge dreiachsiger Beanspruchung beträgt somit  $\Delta f_{ce} = 4 \cdot |\sigma_1|$ .

Aus Bild 3.5 ist ersichtlich, dass aus einer Querpressung nicht nur eine Erhöhung der Festigkeit, sondern auch eine grössere Duktilität resultiert. Dieses Phänomen lässt sich mit den unterschiedlichen Bruchvorgängen erklären. Im Fall von grossen Querpressungen wird der Bruch primär durch Schiebung entlang einer geneigten Gleitfläche eingeleitet und nicht wie beim einachsigen Druckversuch vorwiegend durch das Instabilwerden der längsgespalteten Struktur (Bild 3.7).

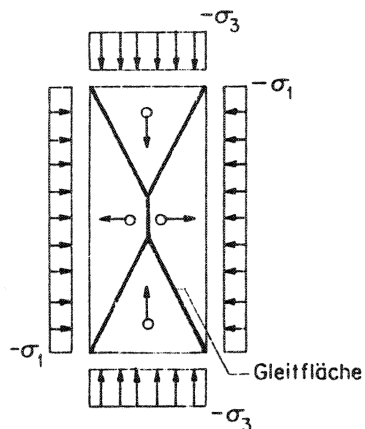


Bild 3.7: Bruchmechanismus

Diese Erhöhung der Duktilität kann berücksichtigt werden, indem vereinfachend angenommen wird, dass die Zunahme  $\Delta f_{ce}$  einen ideal duktilen Charakter aufweist. Für  $f_{ce}$  resultieren somit

$$f_{ce} = f_c + 4 \cdot |\sigma_1| \quad \text{für } f_c \leq 20 \text{ MPa}$$

$$f_{ce} = 2.7 \cdot f_c^{2/3} + 4 \cdot |\sigma_1| \quad \text{für } f_c > 20 \text{ MPa}$$

Ein dreiachsiger Spannungszustand ist zum Teil im Prüfkörper des Würfelversuchs, bedingt durch die Behinderung der Querdehnung bei den Lasteinleitungsflächen, vorhanden (Bild 3.8).

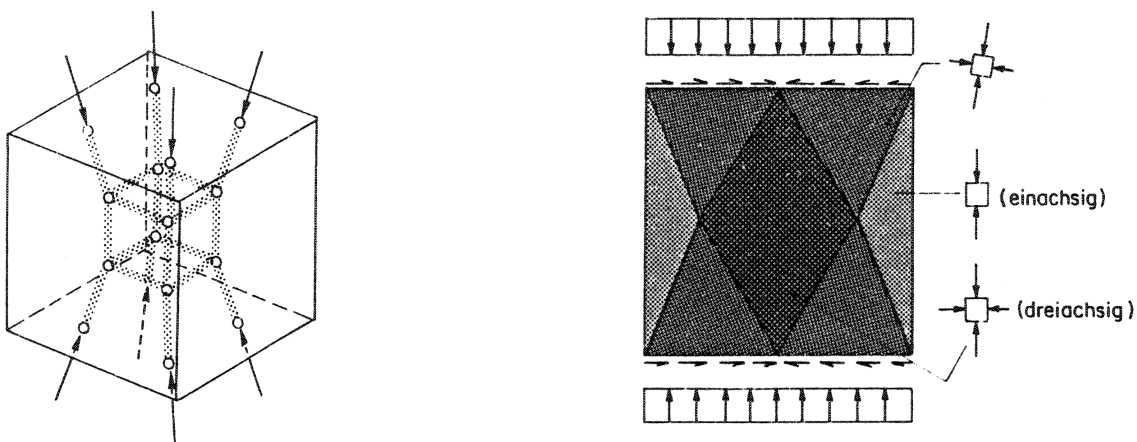


Bild 3.8: Schematischer Verlauf der inneren Kräfte und Spannungsfeld

Aus dem erwähnten Grund sind die mit dem Würfelversuch ermittelten Festigkeitswerte höher als  $f_c$  ( $f_{cw} \approx 1.25 f_c$ ) und demzufolge nicht repräsentativ für die einachsige Betonfestigkeit.

Ähnliches kann in hochbeanspruchten lokalen Zonen, deren Abmessungen mit der Elementstärke vergleichbar sind, auftreten (Behinderung der Querdehnung durch benachbarte unbeanspruchte Betonzonen) (Bild 3.9). Falls dort eine zusätzliche Umschnürungsbewehrung vorhanden ist, kann die Betonfestigkeit ein Mehrfaches von  $f_c$  betragen.

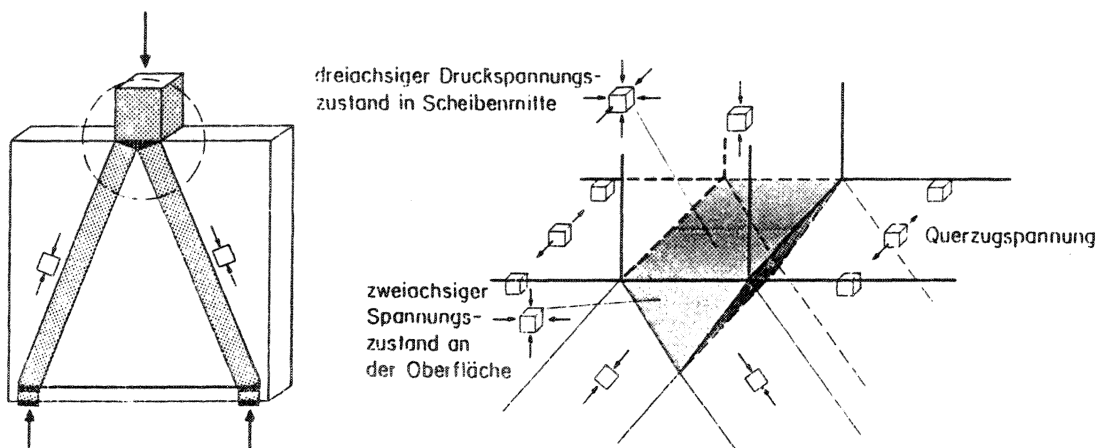


Bild 3.9: Behinderung der Querdehnung in lokaler Zone

### 3.2. Beton mit aufgezwungenen Rissen

Bei den im Kapitel 2 entwickelten Spannungsfeldern waren einachsige Spannungszustände im Beton oft mit einem Spannungszustand einer auf Zug beanspruchten Bewehrung überlagert. Ein solcher Fall mit senkrecht zum Druckfeld verlaufender Bewehrung ist im Bild 3.10 dargestellt.

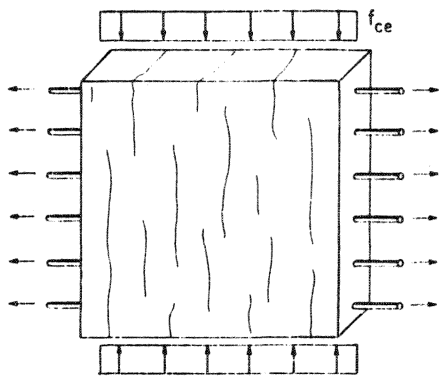


Bild 3.10: Betondruckfeld mit auf Zug beanspruchter Querbewehrung

Die Verformungen der Bewehrung bewirken Rissbildung im Beton. Damit resultiert eine ähnliche Betonentfestigung wie im Fall der Querverformung eines einachsigen beanspruchten Betonelementes. Im Bild 3.11 ist die Betonspannung als Funktion der Betonquerdehnung eines Betonelementes mit oder ohne Querbewehrung dargestellt.

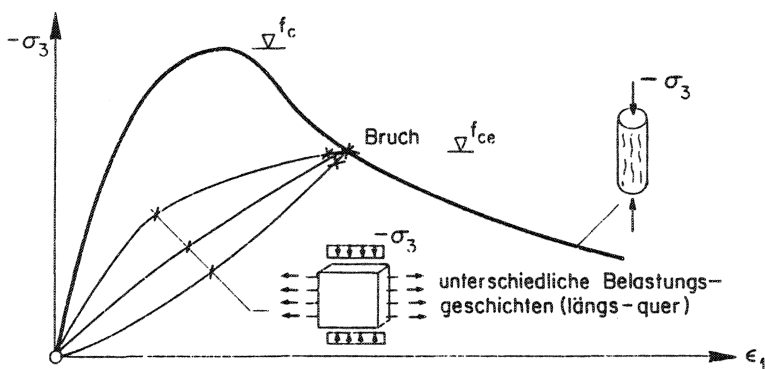


Bild 3.11: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Betons mit und ohne Querbewehrung

Da bei der Bemessung nach der Plastizitätstheorie (starr-plastisch) die Verformungen nicht quantifiziert werden, kann dieses Phänomen nur indirekt berücksichtigt werden, indem als effektive Festigkeit  $f_{ce}$  ein in bezug auf  $f_c$  abgeminderter Wert angesetzt wird. Damit wird berücksichtigt, dass das Verhalten des Betons nicht ideal plastisch ist.

Wie aus einem Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Werte der Zylinderfestigkeit  $f_c$  (Bild 3.2) hervorgeht, ist bei gegebener Querverformung  $\epsilon_1$  das Verhältnis  $f_{ce}/f_c$  ebenfalls von der Zylinderfestigkeit  $f_c$  abhängig. Bei nicht zu grossen Querdehnungen ( $\epsilon_1 < 3\text{‰}$ ) kann im Fall einer rechtwinklig zum Betondruckfeld verlaufenden Querbewehrung mit folgenden Werten gerechnet werden:

$$f_{ce} = 0.8 \cdot f_c \quad \text{für } f_c \leq 20 \text{ MPa}$$

$$f_{ce} = 2.2 \cdot f_c^{2/3} \quad \text{für } f_c > 20 \text{ MPa}$$

Verläuft die Querbewehrung nicht senkrecht zum Betondruckfeld, so resultiert bei der Rissöffnung eine zusätzliche Entfestigung des Betons (Bild 3.12).

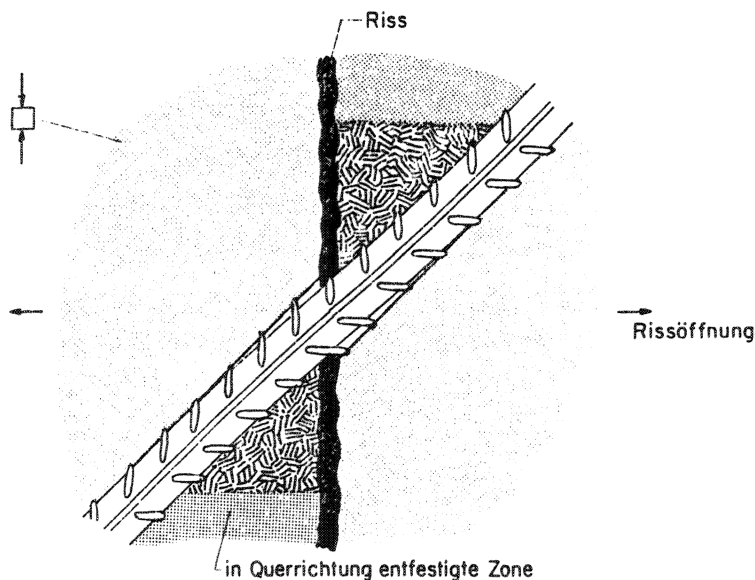


Bild 3.12: Interaktion zwischen Beton und Bewehrung beim Riss

Aus der Biegung der Bewehrungsstäbe im Rissbereich resultiert eine Querkzugspannung, die im Bruchzustand zum Abplatzen der Betonüberdeckung führt. Für gewöhnliche Verhältnisse kann in diesem Fall mit

$$f_{ce} = 0.6 \cdot f_c \quad \text{für } f_c \leq 20 \text{ MPa}$$

$$f_{ce} = 1.6 \cdot f_c^{2/3} \quad \text{für } f_c > 20 \text{ MPa}$$

gerechnet werden.

### 3.2.4 Kraftübertragung über Rissverzahnung

Sowohl die Belastungsgeschichte als auch die Umlagerung der inneren Kräfte erfordern in manchen Fällen eine Kraftübertragung durch einen geöffneten Riss. Bei schräg zur Rissebene verlaufendem Betondruckfeld erfolgt diese Kraftübertragung über die sogenannte Rissverzahnung.

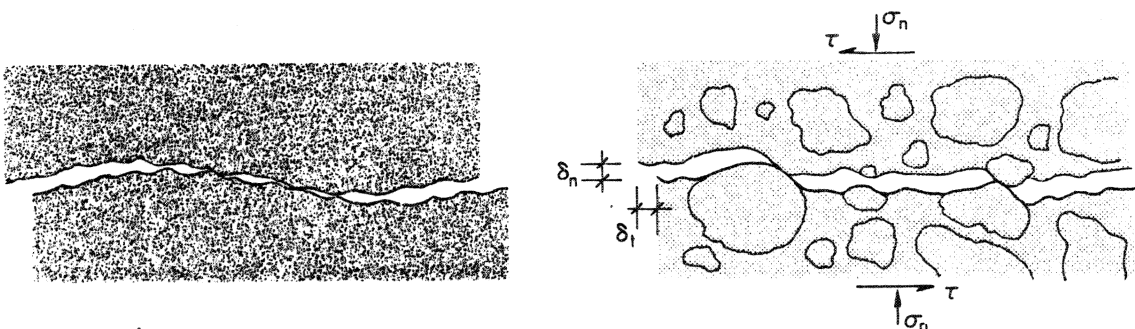


Bild 3.13: a) Makroverzahnung (Grössenordnung  $\approx$  Struktur)  
b) Mikroverzahnung (Grössenordnung  $\approx$  Körner)

Bei kleinen Rissöffnungen  $\delta_n$  und genügend grossen Riss-Schiebungen  $\delta_t$  wirkt die Mikroverzahnung auf der gesamten Rissfläche (Bild 3.13 b), bei grossen Rissöffnungen hingegen kann die Kraft nur noch in lokalen Zonen (Makroverzahnung) übertragen werden (Bild 3.13 a).

In bezug auf die praktische Bemessung ist zu bemerken, dass im allgemeinen der innere Kräfteverlauf im Bruchzustand nur einwandfrei gewährleistet ist, wenn die Rissweiten mit einer Bewehrung klein gehalten werden.

Die effektiven Festigkeiten  $f_{ce}$  sind für die besprochenen Fälle im Bild 3.14 zusammenfassend angegeben.

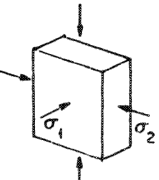
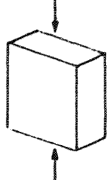
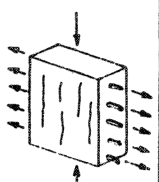
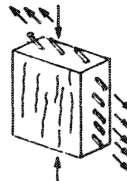
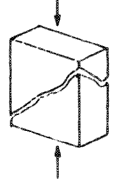
BEANSPRUCHUNG		EFFEKTIVE FESTIGKEIT $f_{ce}$		ANWENDUNGEN
		für $f_c \leq 20 \text{ MPa}$	für $f_c \geq 20 \text{ MPa}$	
homogen, mit Querdruck oder behinderter Querdehnung		$f_c + 4  \sigma_1 $	$2.7 f_c^{2/3} +  \sigma_1 $	<ul style="list-style-type: none"> <li>- dreiachsiger Druck allgemein</li> <li>- behinderte Querdehnung (Krafteinleitung, umschnürte Stütze, ...)</li> </ul>
homogen, einachsiger Druck		$f_c$	$2.7 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- reiner Druck (Stützen, ...)</li> <li>- Biegung, Biegung + Normalkraft (Balken und Platten)</li> <li>- Scheiben</li> </ul>
einachsiger Druck im Beton, mit Querdehnung senkrecht dazu		$0.8 f_c$	$2.2 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Scheiben,</li> <li>- Balken mit Querdehnung</li> <li>- Platten</li> </ul>
einachsiger Druck im Beton, mit schiefer Bewehrung		$0.6 f_c$	$1.6 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Balken unter Querkraft</li> <li>- Balken unter Torsion</li> <li>- Scheiben</li> <li>- Platten mit hoher Drillbeanspruchung</li> </ul>
breite Risse, möglich		Plastizitätstheorie nicht anwendbar, siehe Kap. 4		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Balken und Scheiben mit ungenügender minimaler Bewehrung</li> <li>- Platten bei hoher Schubbeanspruchung (Durchstanzen)</li> </ul>

Bild 3.14: Betonfestigkeit je nach Zustand



### 3.3 Kraftübertragung Bewehrung – Beton

Da das Versagen solcher Kraftübertragungen üblicherweise einen spröden Charakter hat, sollten diese Brucharten bei der Bemessung nicht massgebend werden. Es ist nicht das Ziel, hier quantitative Bemessungshilfen anzugeben, sondern das Tragverhalten und die wichtigsten Einflüsse auf die Festigkeit qualitativ zu beschreiben.

#### 3.2.1 Verankerung von Bewehrungsstäben

Die Uebertragung der Schubkräfte zwischen Bewehrung und Beton erfolgt bei kleinen Beanspruchungen primär über Haftung (molekulare Bindung und Mikroverzahnung). Nach der Ueberschreitung der Haftfestigkeit erfolgt die Kraftübertragung über die Rippen der Bewehrungsstäbe. Für die Beschreibung des Verlaufes der inneren Kräfte im Bruchzustand können die Spannungsfelder für die Beschreibung der Kraftausbreitung im Druckgurt von Plattenbalken übernommen und erweitert werden. Die derart erhaltenen rotationssymmetrischen Spannungsfelder stellen eine Vereinfachung des tatsächlichen Spannungszustandes dar. Im Bild 3.15a erfolgt die Umlenkung des diagonalen Druckfeldes mit einem ringförmigen Betonzugfeld, im Bild 3.15b hingegen mit einer Umschnürungsbewehrung.

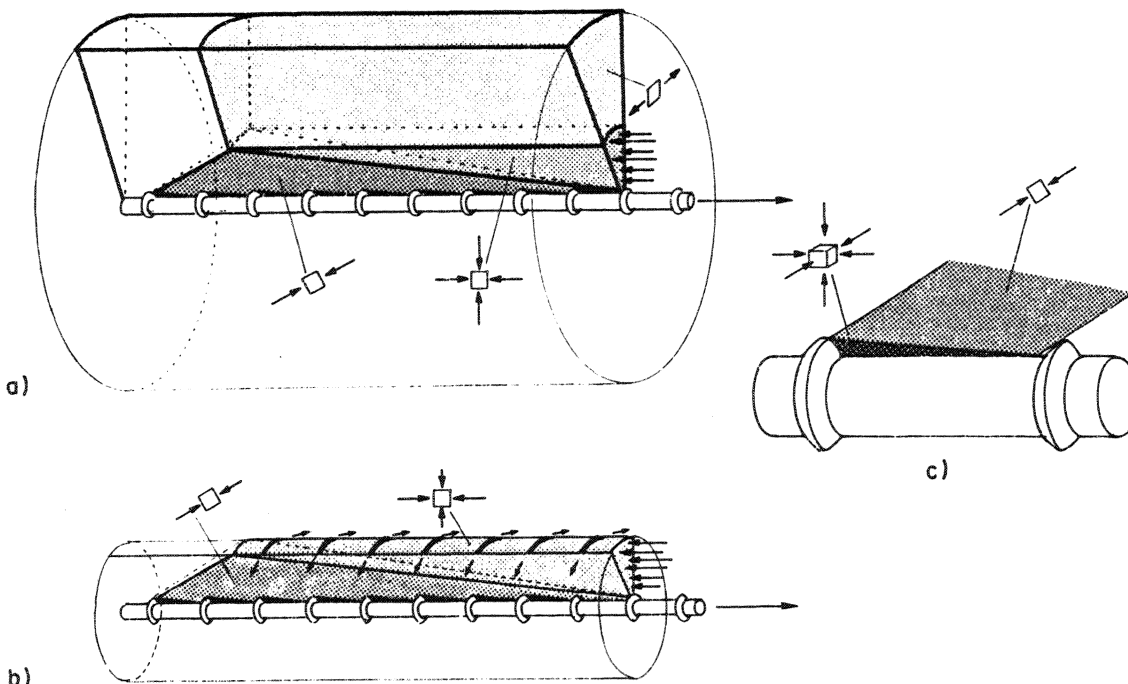


Bild 3.15: Spannungsfelder für die Beschreibung des Spannungszustandes im Verankerungsbereich. a) Aufnahme der Spreizkraft mit Betonzugring, b) Aufnahme der Spreizkraft mit Umschnürungsbewehrung, c) Detail

Ein vorzeitiger Bruch (Verankerungsbruch) tritt auf, wenn entweder der Betonzugring versagt oder die Umschnürungsbewehrung fließt. Der Beton in der Nähe des Bewehrungsstabes (diagonales Betondruckfeld) ist in der Regel nicht massgebend, weil er dreiaxsig beansprucht sein kann.

Wenn keine Umschnürungsbewehrung vorhanden ist, dann ist die Traglast ausser von der Verankerungslänge auch von der Betonzugfestigkeit und von der Stärke des Betonzugrings abhängig. Eine theoretische Auswertung des Spannungsfeldes gemäss Bild 3.15a ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen der Verbundfestigkeit und der Stärke des Betonzugrings (Betonüberdeckung). Die im Bild 3.16 eingetragenen Versuchsergebnisse aus [14,15,16] bestätigen diesen Zusammenhang. Es ist zu bemerken, dass ein eventuell schon vorhandener Riss im Bereich des Zugrings die Verbundfestigkeit negativ beeinflusst.

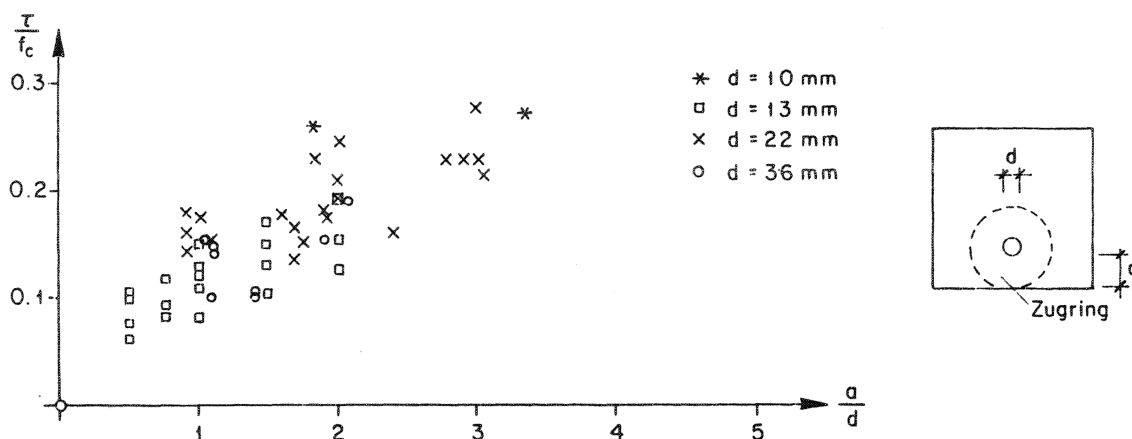


Bild 3.16: Verbundfestigkeit als Funktion der Betonüberdeckung aus [14,15,16]  
 $(\tau = N_s / \pi \cdot d \cdot l; N_s = \text{Kraft im Bewehrungsstab, } l = \text{Verankerungslänge})$

Eine Umschnürungsbewehrung oder eine äussere Druckkraft hat den gleichen Einfluss auf die Verbundfestigkeit. Damit eine Umschnürungsbewehrung voll wirksam wird, muss sie im Verankerungsbereich in genügendem Abstand den gesamten Stab umfassen. Normalerweise ist jedoch eine Querbewehrung in der Nähe der Betonoberfläche angeordnet und im Kontakt mit dem zu verankernden Stab, so dass sich kein rotationssymmetrisches Spannungsfeld einstellen kann. In diesem Fall kann das im Bild 2.38 aufgezeichnete Spannungsfeld für die Beschreibung der Kraftausbreitung im Druckgurt von Plattenbalken praktisch direkt übernommen werden (Bild 3.17).

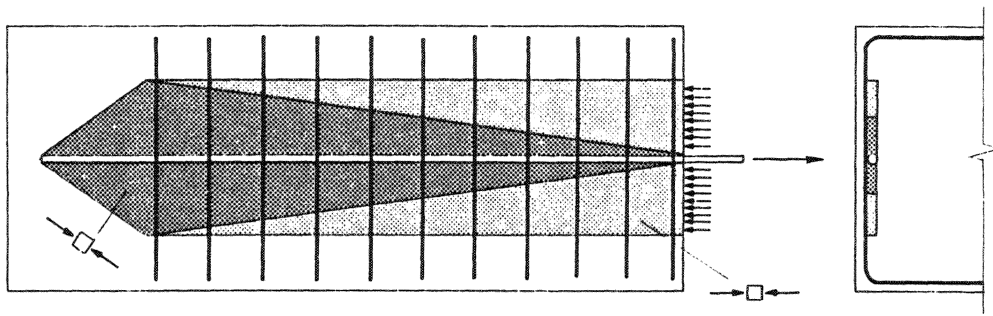


Bild 3.17: Ebenes Spannungsfeld

Das Bild 3.18 zeigt die experimentell ermittelte Abhängigkeit der Verbundfestigkeit vom Querbewehrungsgehalt (Versuchsergebnisse aus [17]). Für grosse Querbewehrungsgehalte ist der Beton im geneigten Druckfeld massgebend (einachsiger Spannungszustand).

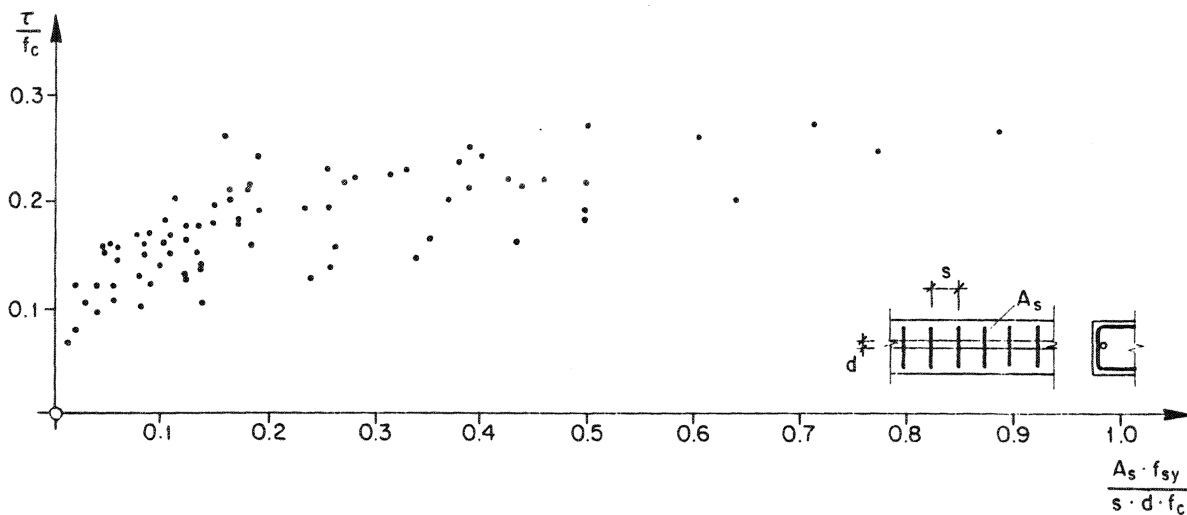


Bild 3.18: Verbundfestigkeit als Funktion des Querbewehrungsgehaltes

### 3.3.2 Bewehrungsstösse

Der Spannungszustand im Ueberlappungsbereich gestossener Bewehrungsstäbe kann vereinfachend mit den im Bild 3.19 dargestellten Spannungsfeldern beschrieben werden. Zwischen den beiden Bewehrungsstäben kann sich ein diagonales Druckfeld ausbilden, dessen Querkomponente mit Hilfe eines ringförmigen Betonzugfeldes (Bild 3.19a) oder mit einer Umschnürungsbewehrung aufgenommen werden kann. In beiden Fällen resultiert ein dreidimensionales Spannungsfeld. Ist hingegen die

Querbewehrung in der Nähe der Betonoberfläche angeordnet und in Kontakt mit den gestossenen Stäben, dann entspricht der innere Kräfteverlauf dem im Bild 3.19b aufgezeichneten ebenen Spannungsfeld.

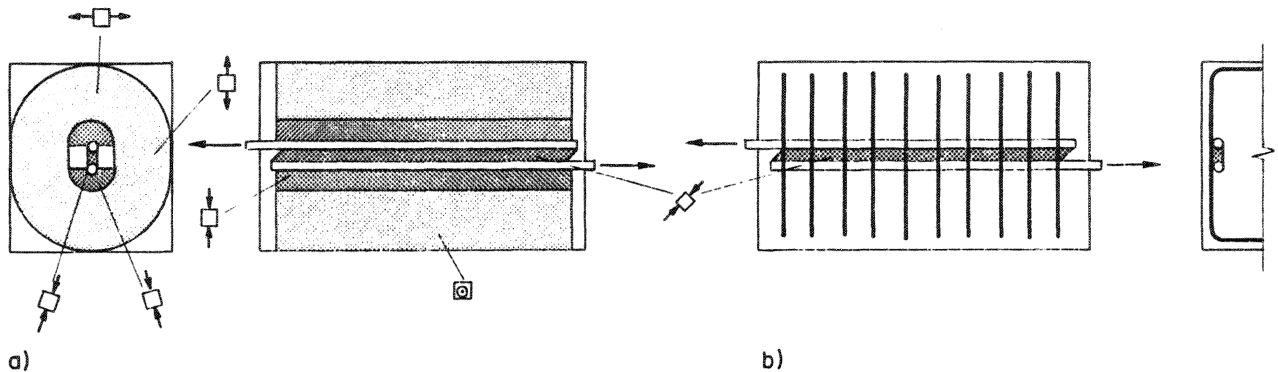


Bild 3.19: Spannungsfelder für die Beschreibung des Spannungszustandes im Stossbereich. a) Feld mit Betonzugring, b) Ebenes Spannungsfeld

Wie aus Bild 3.20a hervorgeht, ist wie im Fall der Verankerung von Bewehrungsstäben auch bei Bewehrungsstößen ohne Umschnürungsbewehrung die Traglast ausser von der Verankerungslänge vor allem von der Stärke des Betonzugrings (d.h. von der Betonüberdeckung) und von der Betonfestigkeit abhängig. Auch im Fall einer ebenen Querbewehrung ist die Abhängigkeit der Verbundfestigkeit vom Querbewehrungsgehalt (Bild 3.20b) ähnlich wie im Fall der Verankerung von Bewehrungsstäben.

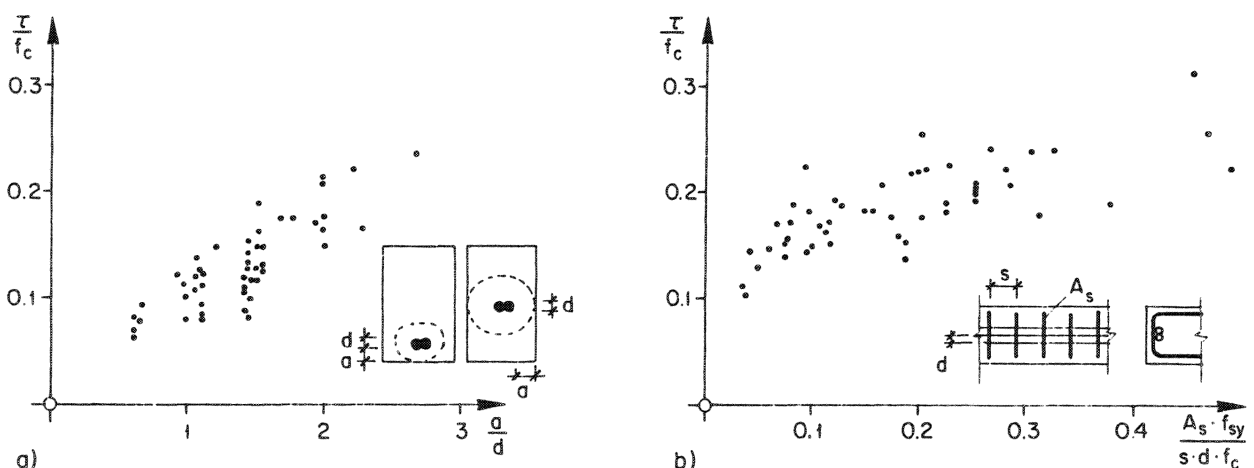


Bild 3.20: Experimentell ermittelte Verbundfestigkeit als Funktion von a) Betonüberdeckung, b) Gehalt an Querbewehrung (Versuchsergebnisse aus [18,19,20,21,22,23,24])

### 3.2.3 Umlenkungen

Bei den im Kapitel 2 behandelten Spannungsfeldern treten sogenannte Knotenbereiche auf, in denen die Kräfte in den Druckstreben mit den Bewehrungskräften im Gleichgewicht sind. Bild 3.21 zeigt die zwei typischen Knotenbereiche, deren Tragverhalten und Festigkeit in diesem Abschnitt behandelt werden.

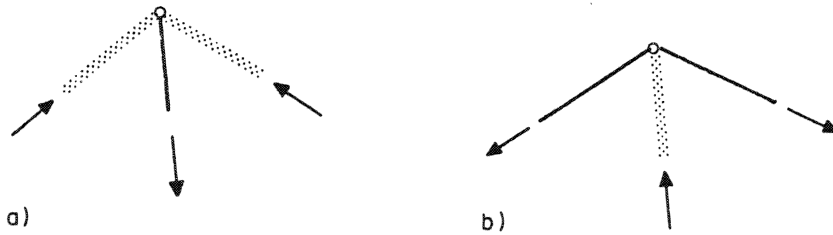


Bild 3.21: Kräfte resultierende im Knotenbereich

Beim Knoten gemäss Bild 3.21a wird eine Druckstrebe mit einer Bewehrung umgelenkt. Je nachdem, ob genügend Platz vorhanden ist, wird die Bewehrungskraft innerhalb oder ausserhalb des Knotenbereichs aufgebaut (Bild 3.22).

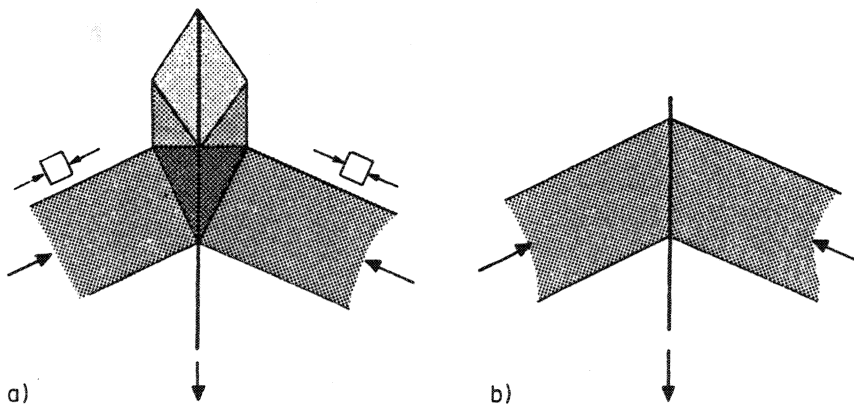


Bild 3.22: Kraftübertragung Bewehrung - Beton ausserhalb (a) und innerhalb (b) des Knotenbereichs

Diese zwei Umlenkungsvarianten sind im Kapitel 2 (Bilder 2.8 und 2.9) eingeführt worden. Im ersten Fall, wo die Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung ausserhalb des Knotenbereichs erfolgt, können das Tragverhalten und die Festig-

keit auf den behandelten Fall der Verankerung von Bewehrungsstäben zurückgeführt werden.

Erfolgt hingegen die Kraftübertragung innerhalb des Knotens, so ist das Tragverhalten vor allem abhängig von der Geometrie des Knotens selbst sowie von der Bewehrungsführung. Bild 3.23 zeigt die Resultierenden der inneren Kräfte für einen Knoten mit einem geraden Bewehrungsstab sowie die möglichen Versagensarten.

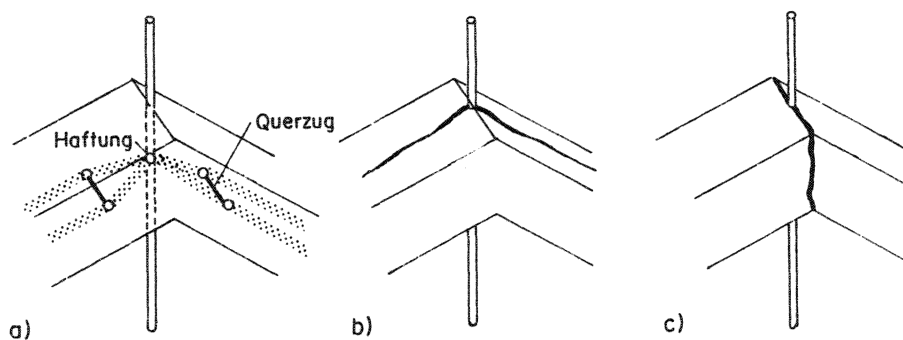


Bild 3.23: Resultierende der inneren Kräfte und mögliche Brucharten

Die im Bild 3.23b dargestellte Bruchart entspricht dem Versagen des auf Querzug beanspruchten Bereichs. Die Festigkeit ist in diesem Fall stark von einer eventuell vorhandenen Querbewehrung oder von einem Querdruck abhängig.

Die andere Bruchart (Bild 3.23c) ist hingegen auf das Versagen der Haftverbindung zwischen Beton und Bewehrungsstahl zurückzuführen. Auch hier ist die Tragwirkung verwandt mit der im Abschnitt 3.3.1 beschriebenen.

Die senkrecht zur Bewehrung wirkende Komponente der Druckstrebenkräfte bewirkt eine Querpressung, die das Tragverhalten günstig beeinflusst. Dieser Zusammenhang ist anhand der im Bild 3.24 dargestellten Versuchsergebnisse aus [25] ersichtlich und wurde von Hess [26] mit Hilfe der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie bestätigt.

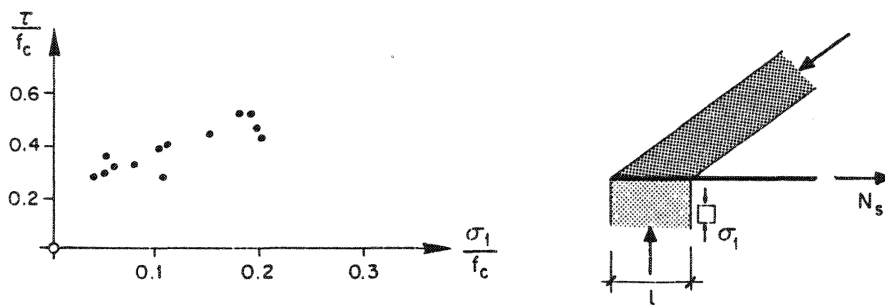


Bild 3.24: Abhängigkeit Haftfestigkeit – Querpressung [25]  
 $(\tau = N_s / \pi \cdot d \cdot l, d = \text{Stabdurchmesser})$

Im Bild 3.25 sind weitere Bewehrungsführungen mit dem Verlauf der inneren Kräfte dargestellt.

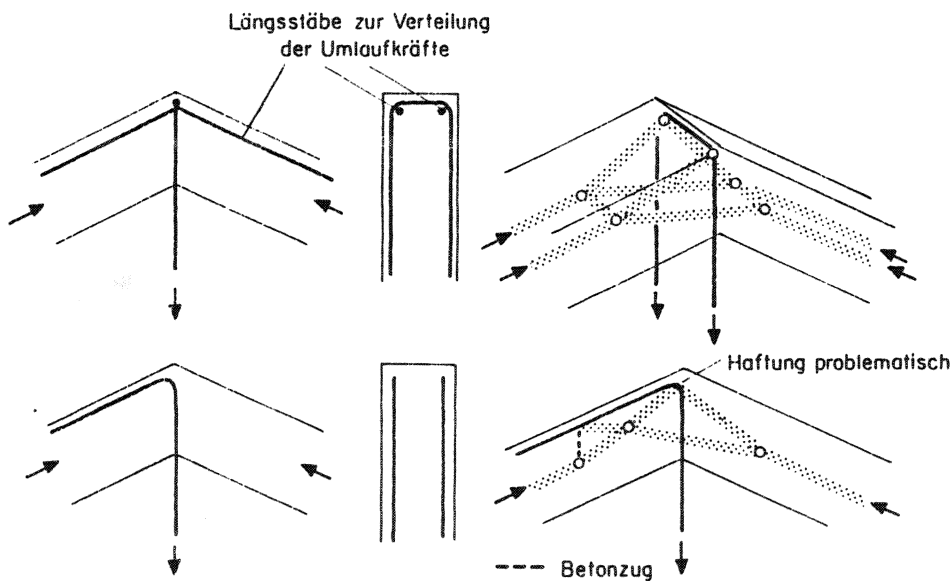


Bild 3.25: Verschiedene Bewehrungsführungen und Verlauf der inneren Kräfte

Bei der Lösung mit Schlaufen (Bild 3.25a) erfolgt die Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrungsstahl nicht primär über Haftung, sondern über Umlenkkräfte an den Stababbiegungen. Da diese Kräfte relativ konzentriert wirken, kann die im Bild 3.23c dargestellte Bruchart massgebend werden. Kräftige Längsstäbe verteilen die Umlenkkräfte und wirken einer Trennung des Betons im Knotenbereich entgegen.

Bei der Verankerung mit einem abgebogenen Eisen wird das Tragverhalten der einen Strebe günstig, dasjenige der anderen Strebe hingegen ungünstig bezüglich der Lösung mit geraden Stäben (Bild 3.22b) beeinflusst. Bild 3.25b zeigt, dass die Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrungsstahl vor allem bei der Abbiegung erfolgt: Auf der linken Seite problemlos über Umlenkkräfte, auf der rechten Seite konzentriert über Haftung mit einem ungünstigen Winkel zwischen dem gekrümmten Bewehrungsstab und der Druckstrebe.

Die Tragwirkung ist bei den im Bild 3.25 dargestellten Lösungen erheblich von der Bewehrungsführung abhängig. Im Bild 3.26 sind analoge Bewehrungsführungen mit grossen Krümmungsradien der Bewehrungen im Vergleich zur Abmessung der Druckstrebe dargestellt.

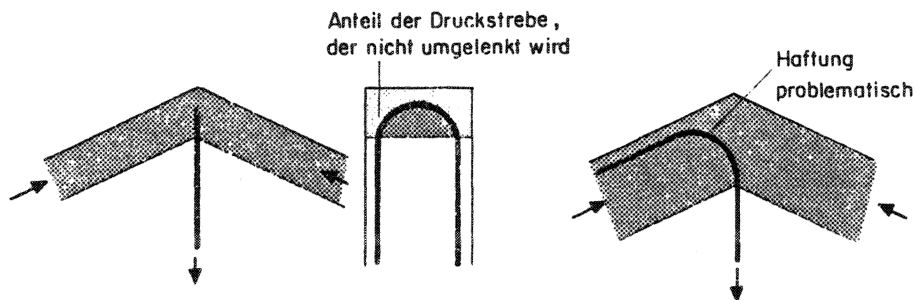


Bild 3.26: Problematische Umlenkungen bei grossen Krümmungsradien

Bei den Rahmenecken mit Druck aussen und Zug innen ist die Abmessung der Druckstrebe üblicherweise so klein, dass mit den erwähnten Bewehrungsanordnungen eine vollständige konzentrierte Umlenkung nicht möglich ist (siehe Abschnitt 2.7.2), sondern nur mit Hilfe extern angebrachter Ankerplatten erreicht werden kann.

Diese Überlegungen sind auch für Knoten mit zwei Zugkräften und einer Druckkraft gemäss Bild 3.21b zutreffend. Bei symmetrischen Knoten erfolgt die Kraftübertragung nur über Umlenkung. Bild 3.27 zeigt ein ebenes Spannungsfeld gemäss Kapitel 2 und eine dreidimensionale Darstellung des qualitativen Verlaufs der inneren Kräfte.



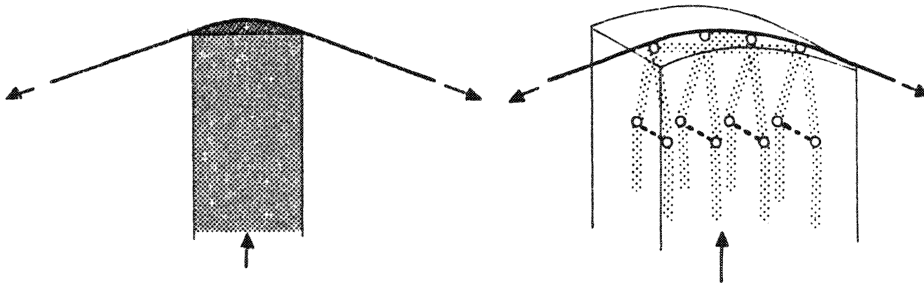


Bild 3.27: Ebenes Spannungsfeld und Resultierende

Aus Bild 3.27b geht hervor, dass der Bereich unmittelbar unterhalb des gekrümmten Bewehrungsstabes dreiachsig auf Druck beansprucht ist. Die lokale Festigkeit ist somit höher als die Zylinderfestigkeit und üblicherweise nicht massgebend. Verantwortlich für den Kollaps ist hingegen die Zugbeanspruchung in Querrichtung. Die Festigkeit der Knotenverbindung ist vor allem von der Abmessung der Betonstrebe in Querrichtung (Betonüberdeckung), von einer eventuell vorhandenen Querbewehrung sowie vom Querdruck abhängig.

Im Bild 3.28 ist die Abhängigkeit der lokalen Betonfestigkeit von der Betonüberdeckung des gekrümmten Bewehrungsstabes dargestellt (aus [27]). Daraus kann entweder die Festigkeit der Verbindung oder der minimale Krümmungsradius der Bewehrung für eine gegebene Stahlspannung und Betonüberdeckung hergeleitet werden.

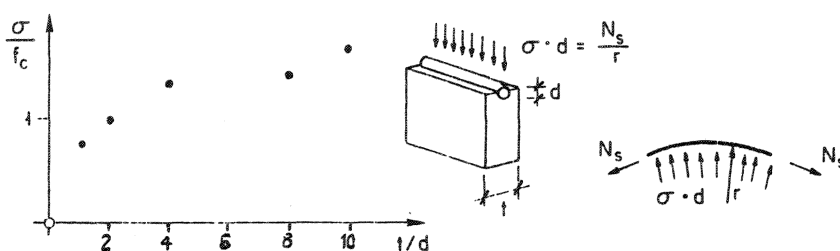


Bild 3.28: Einfluss der Betonüberdeckung

Bei nicht symmetrischen Knoten kann die Strebenkraft so in zwei Komponenten zerlegt werden, dass die eine Komponente mit den Umlenkkraften und die andere

Komponente mit den Haftspannungen des Bewehrungsstabes im Gleichgewicht ist (Bild 3.29a). Reicht die Haftfestigkeit im Knotenbereich nicht, so kann diese Kraftübertragung im benachbarten Bereich erfolgen (Bild 3.29b).

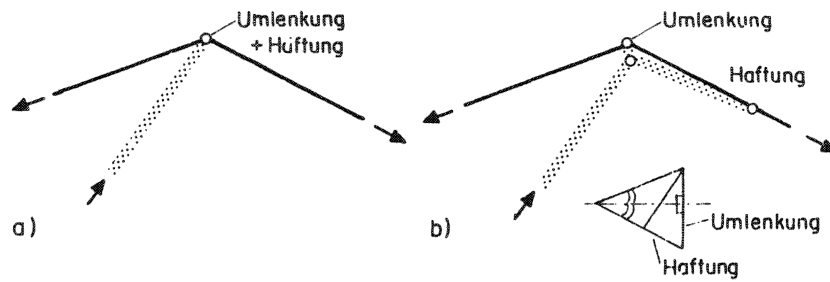


Bild 3.29: Kraftübertragung schematisch

#### 4. ZUR ENTWICKLUNG ZWECKMAESSIGER SPANNUNGSFELDER UNTER EINBEZUG KINEMATISCHER UEBERLEGUNGEN

---

##### 4.1 Einleitung

Stahlbetontragwerke sind innerlich statisch unbestimmte Systeme. Bei der Bemessung müssen somit die verschiedenen Tragwirkungen erkannt und die Widerstände der daraus resultierenden Subsysteme festgelegt werden. Obwohl theoretisch unendlich viele Subsysteme (innere Tragwirkung) möglich sind, müssen, um ein einwandfreies Verhalten des Tragwerks sowohl im Gebrauchs- als auch im Bruchzustand zu gewährleisten, nur einige Subsysteme berücksichtigt werden. In diesem Kapitel wird aufgezeigt, wie unter Einbezug kinematischer Ueberlegungen die zu berücksichtigenden Subsysteme entwickelt werden können.

Diese ausgewählten Subsysteme müssen nicht unbedingt gleiche Widerstände erhalten. Im Kapitel 1 wurde diese Aufteilung anhand von Beispielen erklärt. Ein qualitatives Prinzip zur Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit wurde formuliert: "Je grösser die spezifische Verformung eines Elementes (Subsystem), desto stärker ist seine Bewehrung." Gleichzeitig muss auch ein minimaler Bewehrungswiderstand vorhanden sein, damit die Verformungen (Risse) verteilt werden können.

##### 4.2 Vorgehen bei der Entwicklung von Subsystemen

Aus dem im Bild 4.1 dargestellten Beispiel geht hervor, wie zweckmässige Spannungsfelder entwickelt werden können. Das Vorgehen zeigt Bild 4.2.

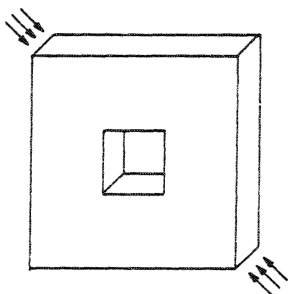


Bild 4.1: Stahlbetonscheibe und Belastung

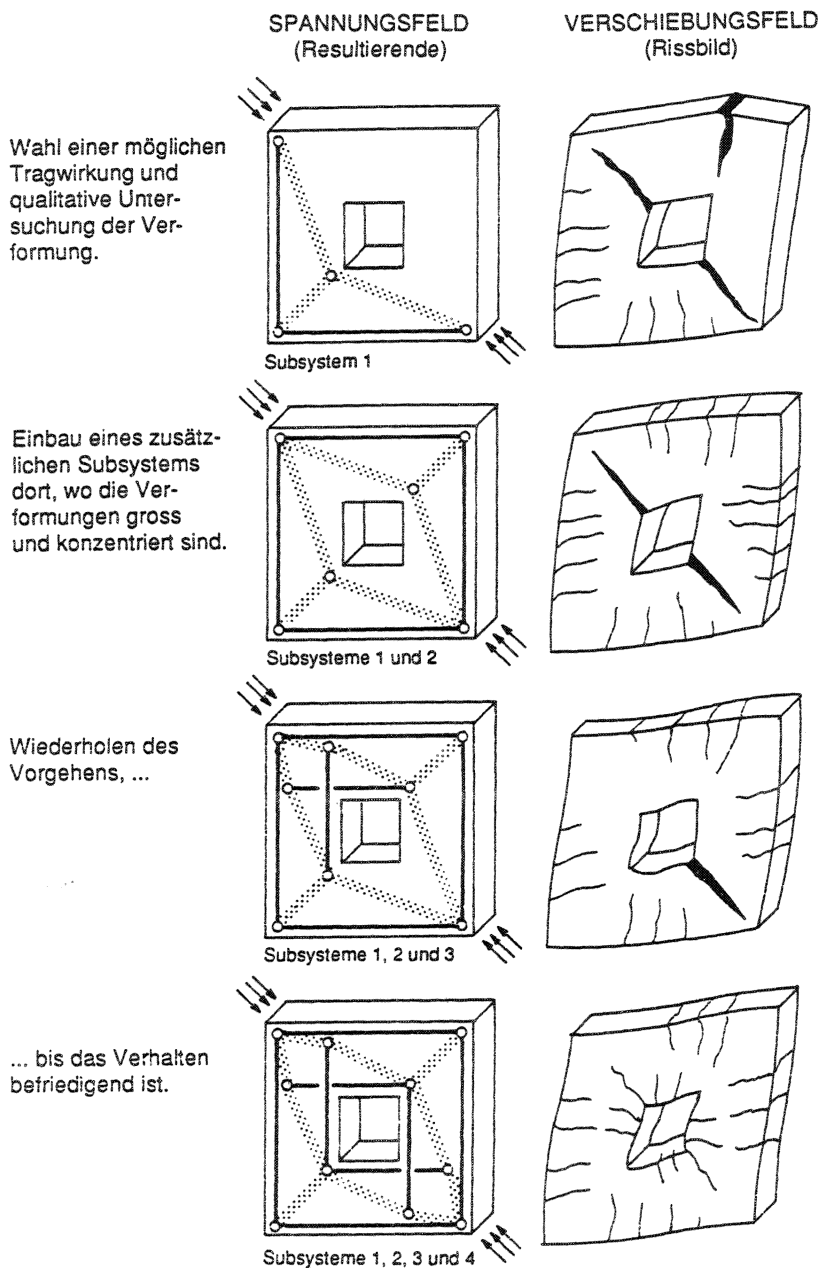


Bild 4.2: Vorgehen bei der Entwicklung zweckmässiger Spannungsfelder

Zuerst wird eine mögliche Tragwirkung frei gewählt. Im nächsten Schritt werden die zugehörigen Verformungen qualitativ untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich in unbewehrten Bereichen die Verformungen in klaffenden Rissen konzentrieren, so dass die entstehenden Elemente als starre Körper betrachtet werden können. Um diese grossen konzentrierten Verformungen zu vermeiden, wird dort ein zusätzliches Subsystem eingebaut. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis ein befriedigendes Verformungsfeld entstanden ist.

Im dargestellten Beispiel sind aus didaktischen Gründen die vier Subsysteme schrittweise eingeführt worden. Durch Berücksichtigung der Symmetrie hätten zwei Schritte vermieden werden können.

Bei der Bemessung dieser Scheibe müssen noch die Widerstände und die Bewehrungsführung festgelegt werden. Wie Bild 4.2 zeigt, kann jedes Subsystem einen Teil der Last aufnehmen. Diese Aufteilung kann nach dem im Kapitel 1 formulierten Prinzip erfolgen. Da die Verformungen der einzelnen Subsysteme von gleicher Grössenordnung sind, sollten die den einzelnen Subsystemen zugewiesenen Lastanteile etwa gleich sein.

### 4.3 Zwei weitere Beispiele: Kraftausbreitungen in einer Scheibe

#### 4.3.1 Scheibe auf Zug beansprucht

Die zu untersuchende Scheibe ist im Bild 4.3 dargestellt.

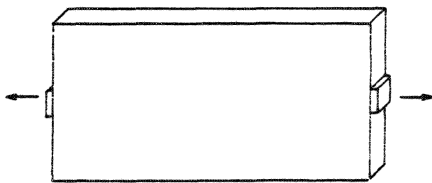


Bild 4.3: Zugscheibe

Als erstes Subsystem wird eine direkte Kraftübertragung mit einem Zugband gemäss Bild 4.4a gewählt. Das zugehörige Verformungsbild (Rissbild) ist durch eine Verteilung der Risse nur im bewehrten Bereich gekennzeichnet (Bild 4.4b).

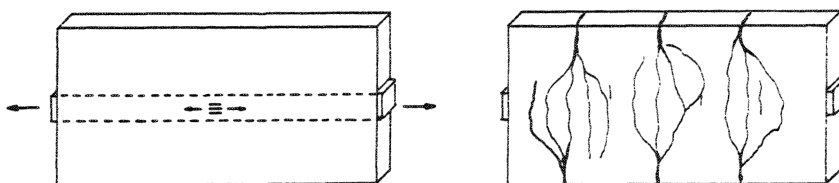


Bild 4.4: Subsystem 1

Um die breiten Sammelrisse im Randbereich zu vermeiden, muss ein zusätzliches Subsystem eingebaut werden. Dieses ist durch eine Kraftübertragung auch im Randbereich (indirekte Kraftübertragung, Bild 4.5) charakterisiert.

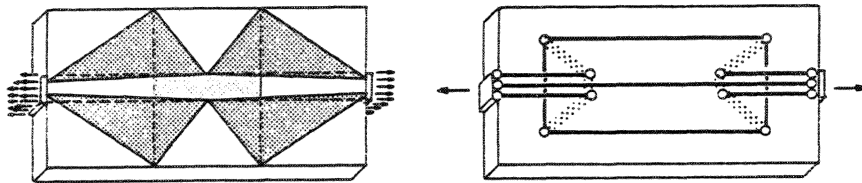


Bild 4.5: Resultierende und Spannungsfeld

Weil die Zugstäbe des Subsystems 2 weniger gedehnt sind als diejenigen des Subsystems 1, können die Randbereiche schwächer bewehrt werden. Im allgemeinen genügt in diesem Bereich eine Bewehrung, die genügend stark ist, um die Risse zu verteilen.

#### 4.3.2 Scheibe auf Druck beansprucht

Die zu untersuchende Scheibe mit Belastung ist im Bild 4.6 dargestellt.

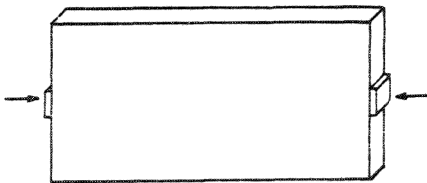


Bild 4.6: Druckscheibe

Wie bei der Zugscheibe kann bei der Druckscheibe die Last direkt übertragen werden (Bild 4.7a). Bei einem solchen Spannungsfeld resultiert keine statisch erforderliche Bewehrung. Bild 4.7b zeigt ein mögliches Rissbild mit einem klaffenden Riss in Längsrichtung (Spaltzug). Die Scheibe ist praktisch in zwei Teile getrennt, die exzentrisch gedrückt sind. Diese exzentrische Beanspruchung führt zu einer Krümmung der zwei Scheiben. Daraus resultiert eine grosse Rissöffnung.

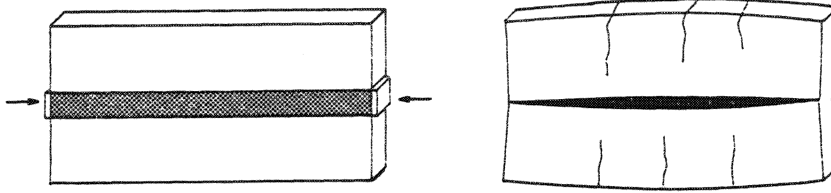


Bild 4.7: Direkte Kraftübertragung, Spannungsfeld und Verformungen

Die zwei voneinander getrennten Scheibenteile können mit einer Querbewehrung zusammengehalten werden. Ein Teil der Längsdruckkraft kann sich ausbreiten und wird mit dieser Querbewehrung umgelenkt (Bild 4.8).

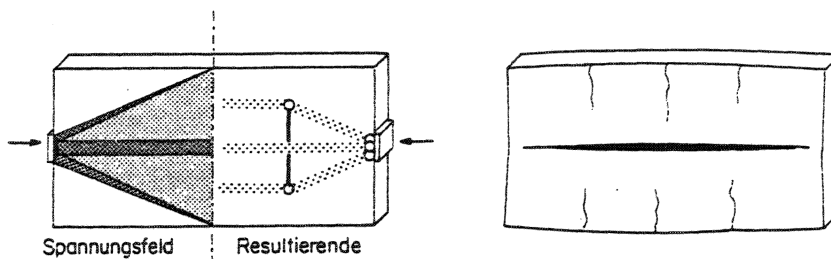


Bild 4.8: Direkte und indirekte Kraftübertragung

Die Öffnung des Längsrisses ist von der Querbewehrung abhängig. Wenn infolge Erhöhung des Querbewehrungsgehaltes die gesamte Druckkraft umgelenkt wird (keine direkte Kraftübertragung mehr), resultiert eine kleinere Rissöffnung (Bild 4.9). Das Subsystem 1 (direkte Kraftübertragung) ist in diesem Fall verschwunden.

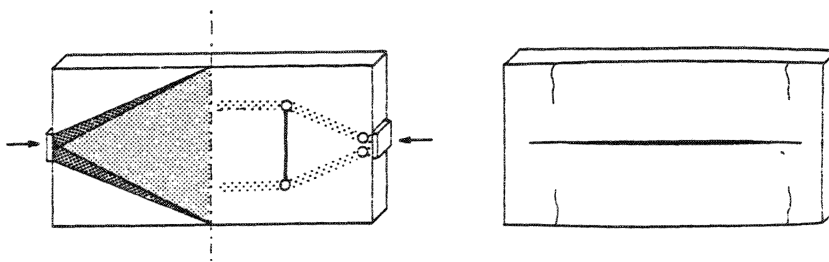


Bild 4.9: Indirekte Kraftübertragung

Die Querbewehrung kann weiter verstärkt werden, so dass sich der Riss in Scheibenmitte wieder schliesst. Das resultierende Spannungsfeld ist im Bild 4.10 dargestellt.

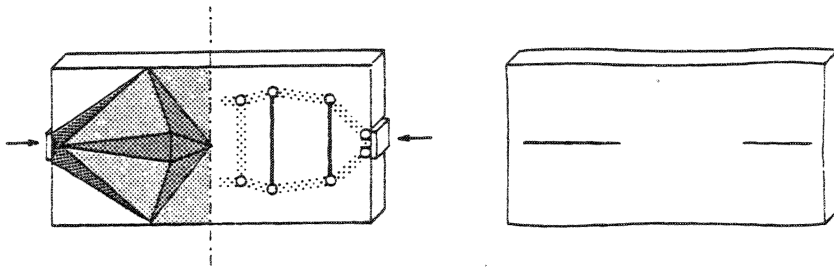


Bild 4.10: Indirekte Kraftübertragung bei grossem Querbewehrungsgehalt

Es ist zu bemerken, dass die Querbewehrung nur dort anzuordnen ist, wo der Riss offengeblieben ist. Die Ausdehnung dieser Zone ist eine Funktion des Bewehrungsgehaltes und der Geometrie der Scheibe. Im Anhang wird gezeigt, wie die Rissöffnung und die Ausdehnung der zu bewehrenden Zone mit vereinfachenden Annahmen abgeschätzt werden können.

Damit lassen sich die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit problemlos erfüllen. Wie bereits im Kapitel 3 erwähnt, kann in diesem Fall ein breiter Riss auch in bezug auf die Tragfähigkeit problematisch werden. Bild 4.11 zeigt eine auf Druck beanspruchte Scheibe ohne Querbewehrung mit einem breiten Längsriss in Scheibenmitte. Weil dieser Riss nicht überall parallel zur Druckstrebe verläuft, muss ein Teil der Kraft über Rissuferverzahnung übertragen werden.

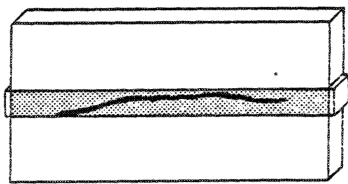


Bild 4.11: Einfluss eines breiten Risses auf die Tragfähigkeit

Zur Gewährleistung der Tragsicherheit genügt eine lokale Umschnürung der Druckstrebe. Mit einer Querbewehrung über die gesamte Scheibenbreite gemäss den Bildern 4.8 bis 4.10 wird sowohl die Gebrauchstauglichkeit als auch die Tragsicherheit gewährleistet.

Die zwei in diesem Abschnitt behandelten Beispiele weisen in bezug auf die Art wie Risse klein gehalten werden einen wesentlichen Unterschied auf:



- Bei der Zugscheibe ist bei gegebenem Längsbewehrungsgehalt die totale Rissbreite praktisch gegeben; die Risse müssen verteilt werden.
- Bei der Druckscheibe hingegen kann die totale Rissbreite mit der Querbewehrung beeinflusst werden.

#### 4.4 Anwendungen

Die im vorangehenden Abschnitt dargestellten Spannungsfelder lassen sich sinngemäss auf alle Bemessungsfälle übertragen, bei denen der erste Entwurf des Spannungsfeldes konzentrierte Streben aufweist.

Bild 4.12 zeigt einige Anwendungen mit dem ersten Entwurf des Spannungsfeldes, dem zu erwartenden Rissbild und dem der Bemessung zugrunde gelegten definitiven Spannungsfeld. Es ist zu bemerken, dass bei der Bemessung solcher Scheiben oft eine qualitative Entwicklung des Spannungsfeldes genügt. Die erforderliche Bewehrung zur Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit kann mit überschlägigen Betrachtungen abgeschätzt werden.

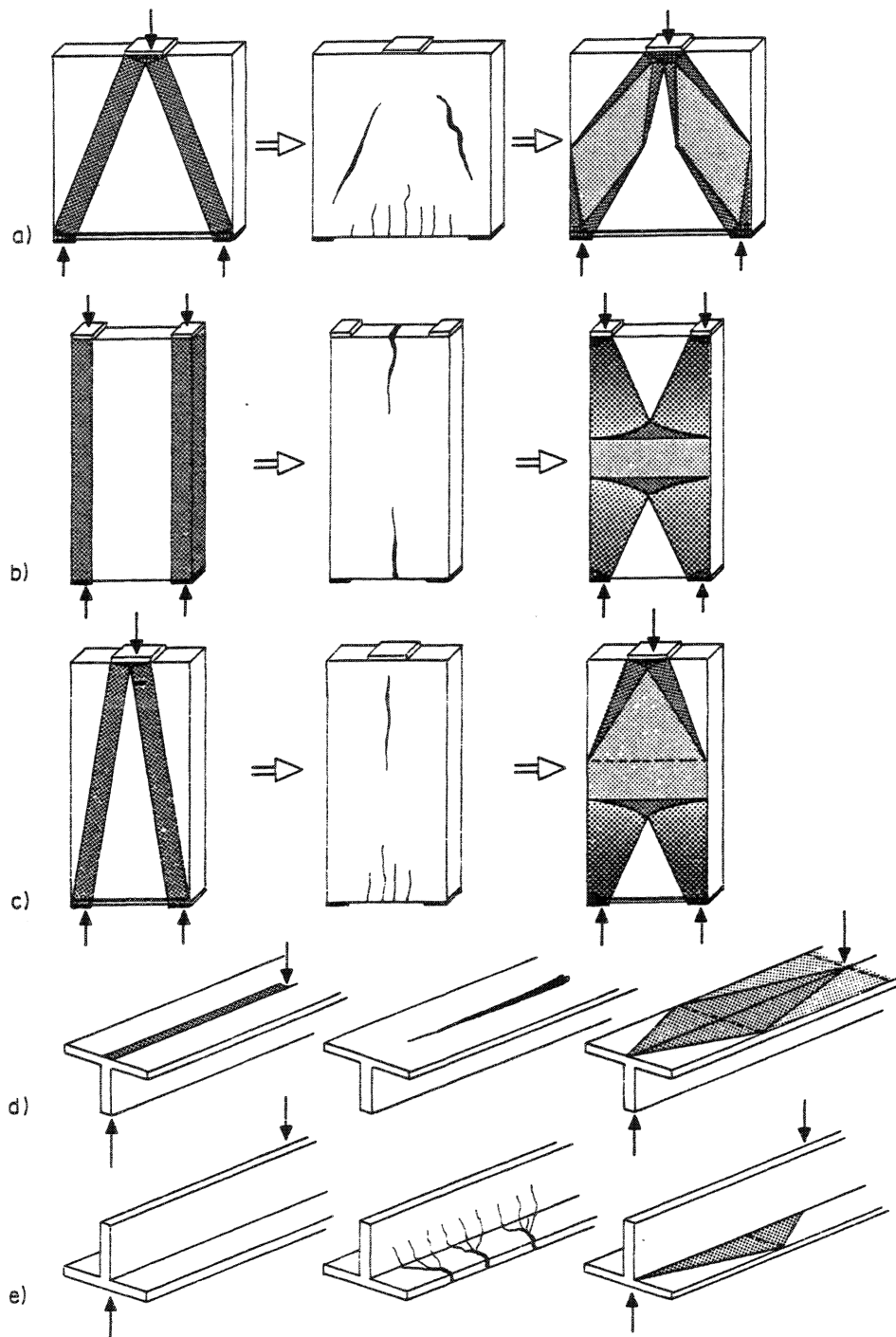


Bild 4.12: Anwendungen

#### 4.5 Beeinträchtigung der Tragfähigkeit durch breite Risse

Im Kapitel 3 wurde gezeigt, dass eine vollständige Kraftübertragung über Verzahnung der Rissufer nur möglich ist, wenn die Rissweiten klein gehalten werden. In extremen Fällen kann es bei Stahlbetonelementen ohne verteilte Bewehrung vorkommen, dass Risse mit zu grossen Oeffnungen in dem Bereich vorhanden sind, in welchem sich eine Druckstrebe ausbilden sollte. Solche Risse können entstanden sein infolge von

- früherer Tragwirkung
- früherer Lastfälle
- Eigenspannungszuständen.

Die Umlagerung der inneren Kräfte ist in diesen Fällen gehindert, so dass ein frühzeitiger Bruch eintreten kann. Probleme entstehen dann, wenn ein Riss die Druckstrebe unter einem flachen Winkel schneidet und die Kraft über Rissuferverzahnung übertragen werden muss. Ein solcher Fall wurde im Abschnitt 4.3.2 (Bild 4.11) behandelt.

Ein weiteres Beispiel von Abminderung der Tragfähigkeit infolge breiter Risse zeigt Bild 4.13. Bei der Lasterhöhung bilden sich in diesem Fall mehrere verschiedene Tragwirkungen aus. Es entstehen zuerst mehr oder weniger vertikale Risse (Biegerisse), die sich bei einer späteren Tragwirkung horizontal fort-pflanzen. An Versuchskörpern durchgeführte Messungen zeigen, dass über diese Risse keine vollständige Kraftübertragung erfolgen kann [11].

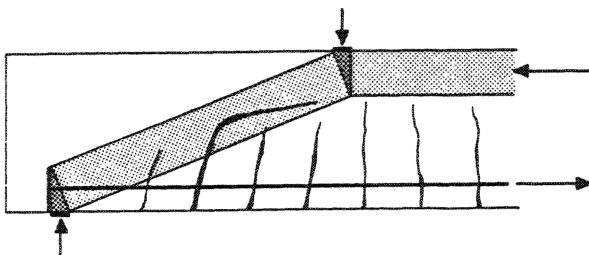


Bild 4.13: Rissbild und Spannungsfeld

Die im Bild 4.13 dargestellte Druckstrebe kann sich somit nicht ausbilden. Wie bereits im Kapitel 2 dargestellt, wird bei solchen Trägern die Last üblicher-

weise indirekt mit Bügeln abgetragen. Eine direkte Kraftübertragung ist in diesem Fall nur möglich, wenn der Riss in der geneigten Druckstrebe mit einer Umschnürungsbewehrung klein gehalten wird.

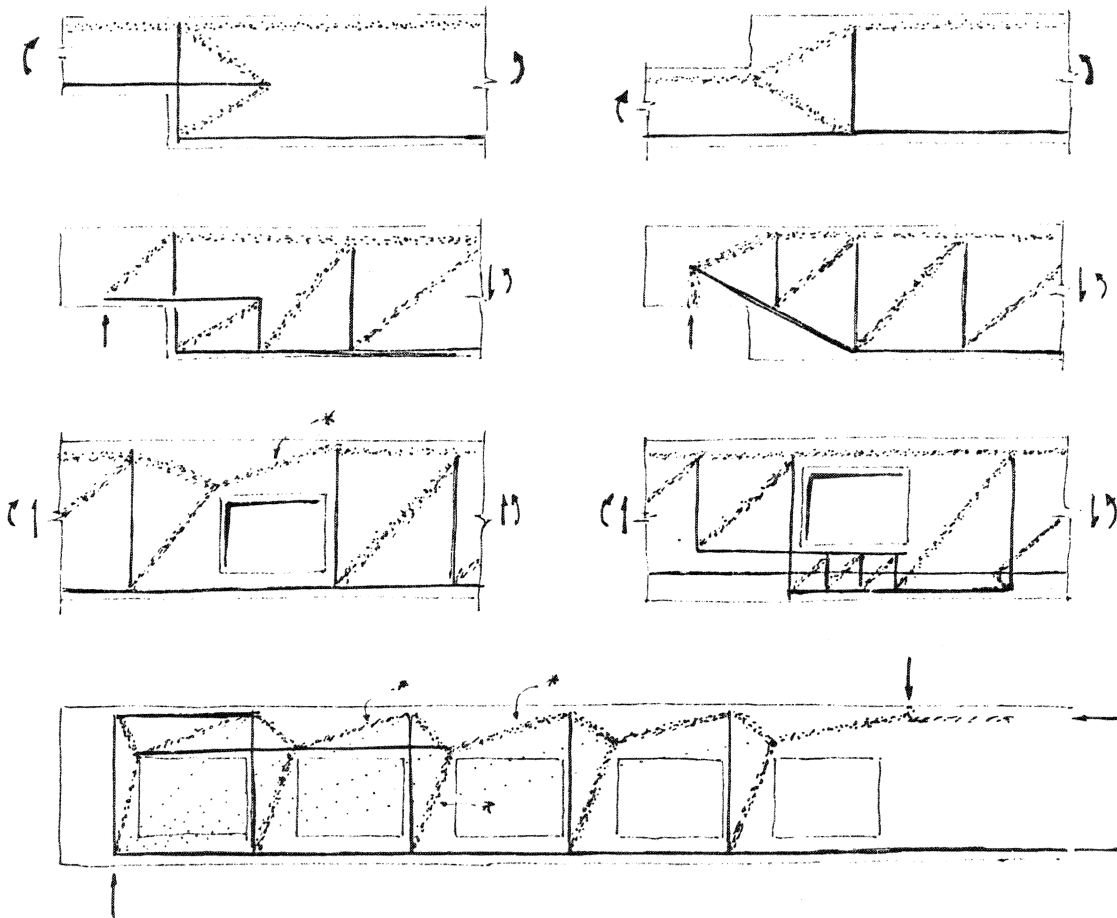
Aus den zwei behandelten Beispielen kann folgende Schlussfolgerung gezogen werden:

Damit die Tragfähigkeit nicht durch Risse beeinträchtigt wird, sind nichtumschnürte Druckstreben, die über längere Strecken verlaufen, zu vermeiden. Kritisch sind vor allem Druckstreben, die sich in der Nähe eines Zugbandes befinden.

## 5. SPANNUNGSFELDER FUER ALLGEMEINE ELEMENTE UND BEANSPRUCHUNGEN

---

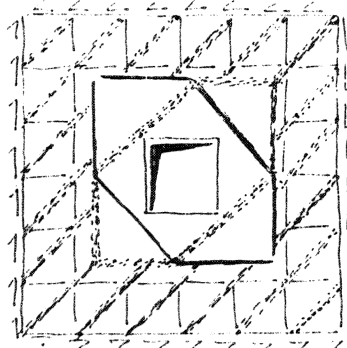
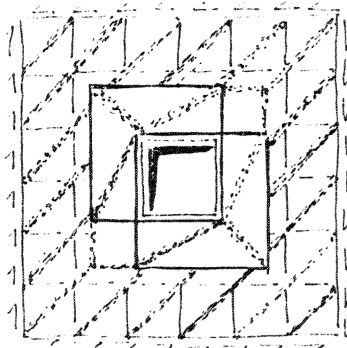
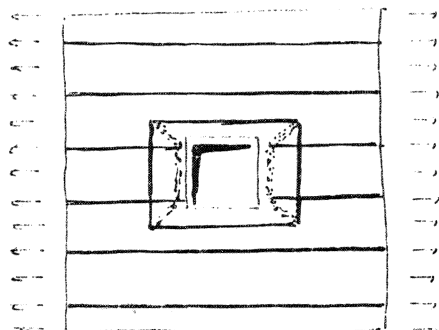
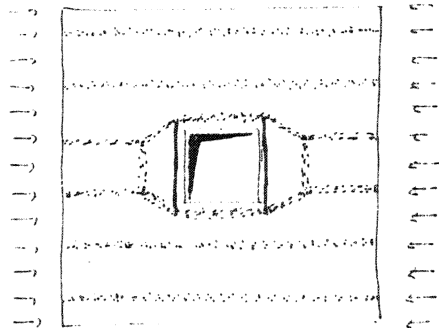
### 5.1 Balken mit sprunghaften Geometrieänderungen



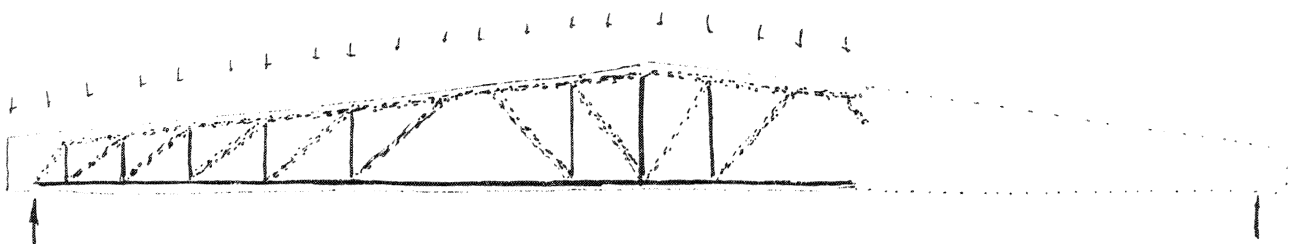
#### \*) Bemerkungen:

- direkte/indirekte Abstützung → Verbindungsträger von Kapitel 2
- zusätzliche Tragsysteme → Kapitel 4

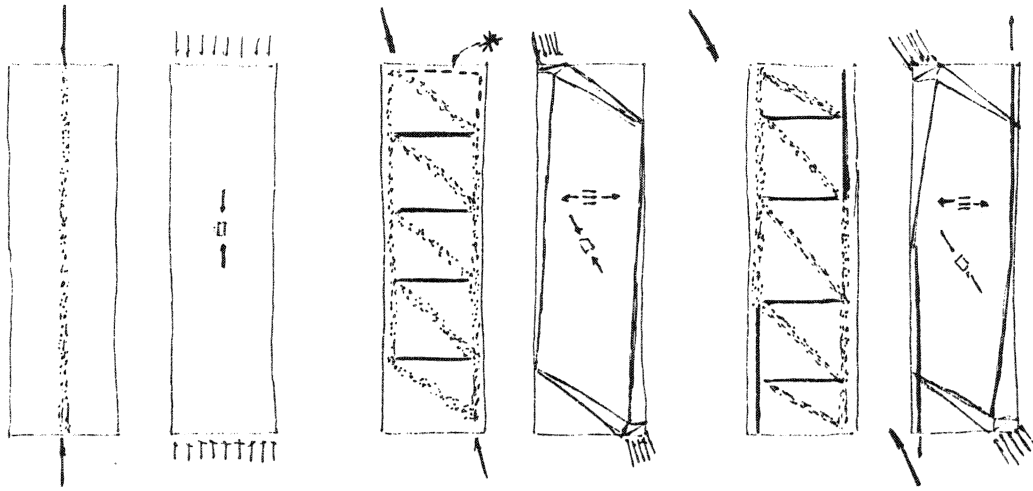
## 5.2 Scheiben mit Aussparungen



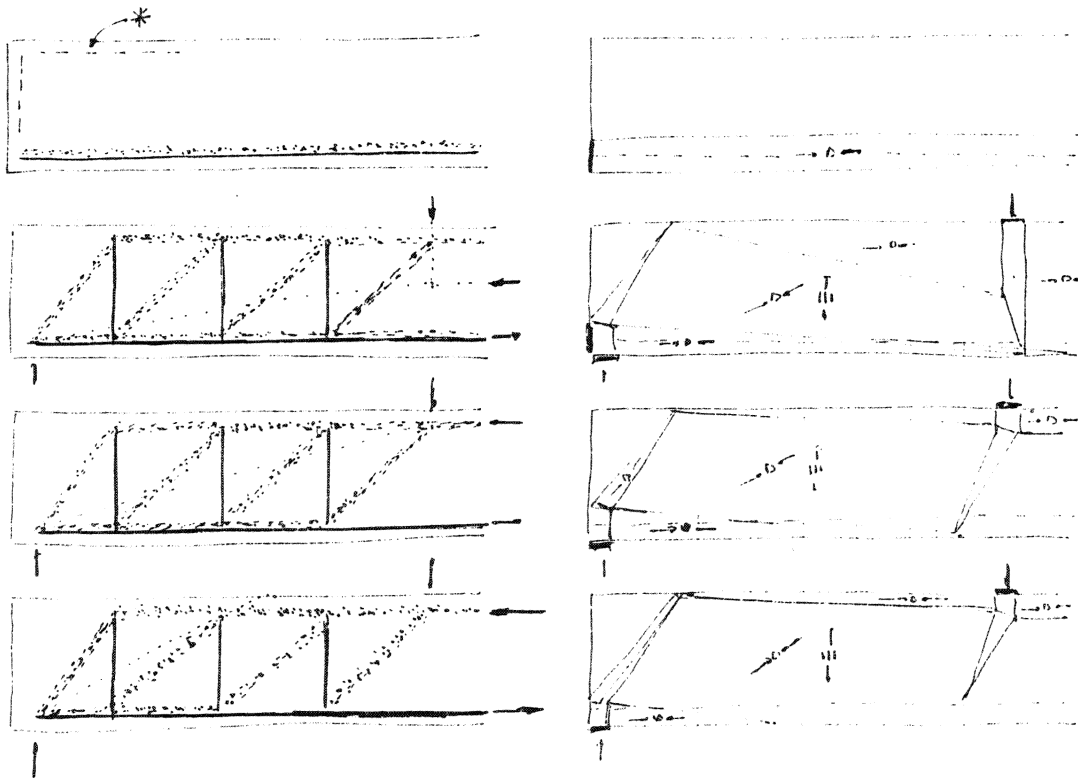
## 5.3 Balken mit variabler Trägerhöhe



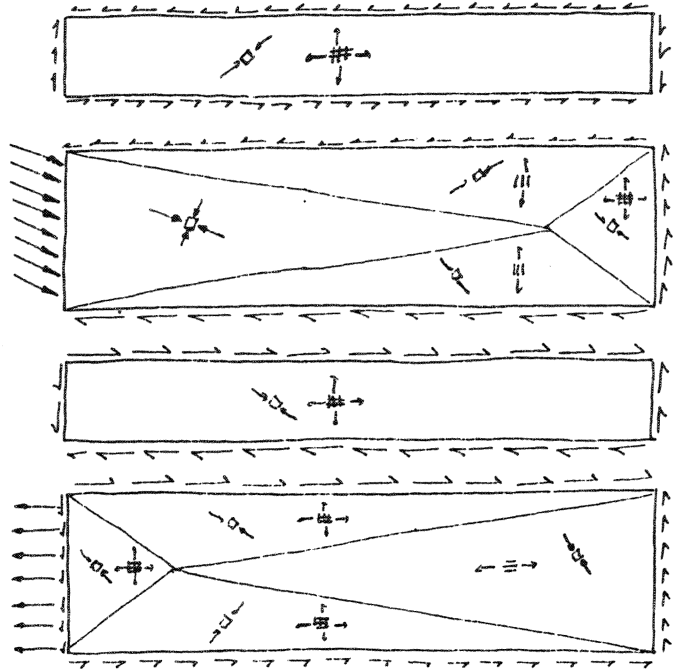
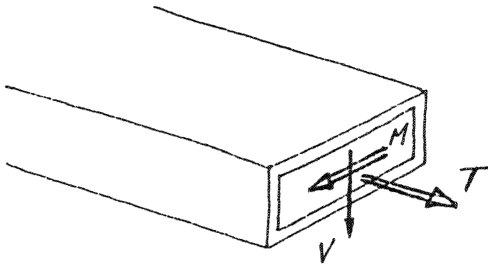
## 5.4 Stützen, Bogen und vorgespannte Balken



\*) Bemerkung → Kapitel 4



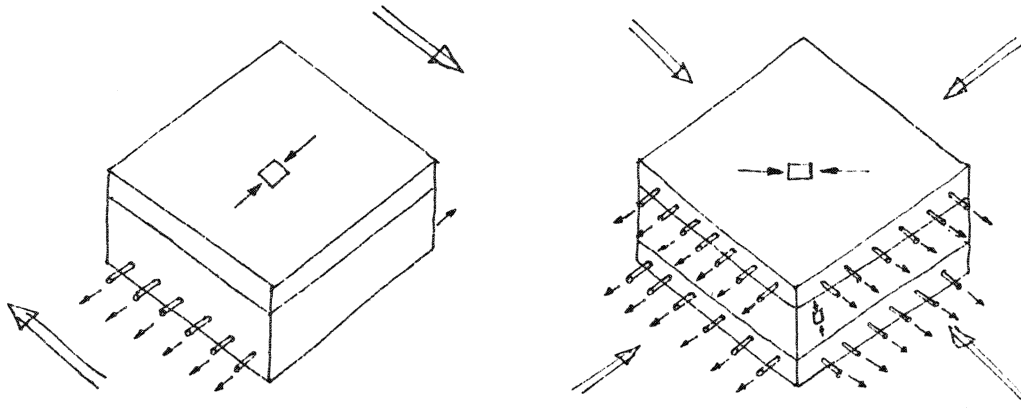
### 5.5 Kombinierte Beanspruchung





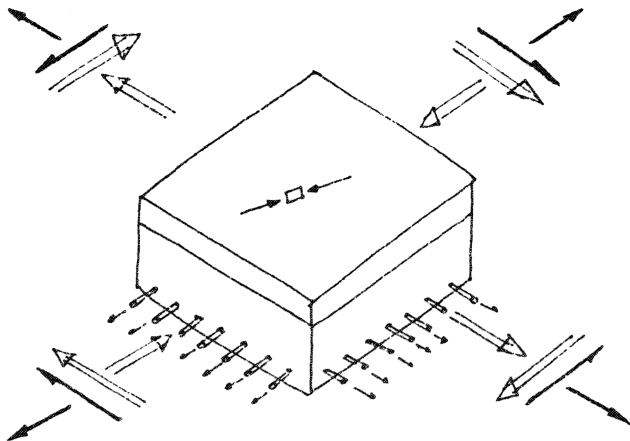
## 5.6 Platten- und Schalenelemente

- reine Biegung:



*Scheiben + Hebelarm  $\Rightarrow$  Platten  
(analytisch, Fließbedingungen)*

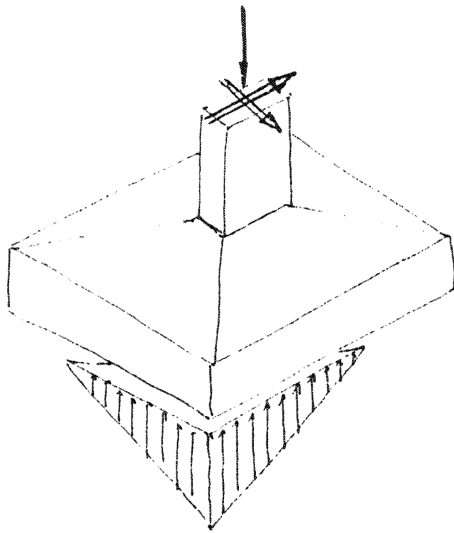
- Biegung mit Membrankräften (Scheibenkräften)



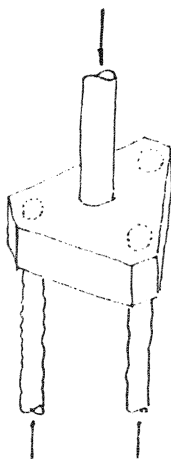


### 5.8 Weitere Beispiele der räumlichen Tragwirkung

– Fundament:



– Pfahlkopf:





## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Prager W., Hodge P.G.: "Theory of Perfectly Plastic Solids", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
- [2] CEB-FIP: "Code modèle pour les structures en béton", Système international de réglementation technique unifiée des structures, Vol. II, Bulletin d'Information No. 124/125, Paris, 1978.
- [3] Ritter W.: "Die Bauweise Hennebique", Schweizerische Bauzeitung 17, 41-43, 49-52, 59-61, 1899.
- [4] Mörsch E.: "Der Eisenbetonbau - Seine Theorie und Anwendung", Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 3. Aufl. 1908, 4. Aufl. 1912, 5. Aufl. 1. Bd., 1. Hälfte, 1920, 2. Hälfte 1922.
- [5] Drucker D.C.: "On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (IVBH), Zürich, Abhandlungen 21, 49-59, 1961.
- [6] Thürlimann B., Grob J., Lüchinger P.: "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, April 1975.
- [7] Thürlimann B., Marti P., Pralong J., Ritz P., Zimmerli B.: "Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, April 1983.
- [8] Nielsen M.P.: "Limit Analysis and Concrete Plasticity", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [9] Chen W.F.: "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1975.
- [10] Schlaich J., Weischede D.: "Ein praktisches Verfahren zum methodischen Bemessen und Konstruieren im Stahlbetonbau", Comité Euro-International du Béton (CEB), Bulletin d'Information No. 150, Paris, 1982.
- [11] Muttoni A.: "Zur Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich (in Vorbereitung).
- [12] Exner H.: "On the Effectiveness Factor in Plastic Analysis of Concrete", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (IVBH), Schlussbericht Kolloquium Kopenhagen 1979, Zürich, 1979.
- [13] Menne B.: "Zur Traglast der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit Umschnürungsbewehrung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 285, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1977.
- [14] Ferguson P.M., Thompson J.N.: "Development Length of High Strength Reinforcing Bars in Bond", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 59, July 1962.

- [15] Ferguson P.M., Thompson J.N.: "Development Length for Large High Strength Reinforcing Bars", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 62, January 1965.
- [16] Chamberlin S.J.: "Spacing of Reinforcement in Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 53, July 1956.
- [17] Robinson J.R., Zsutty T.C., Guiorgadze G., Lima L.J., Jung H.L., Villatoux J.P.: "La Couture des Jonctions par Adhérence", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Supplément du No. 318, Paris, 1984.
- [18] Chinn J., Ferguson P.M., Thompson J.N.: "Lapped Splices in Reinforced Concrete Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 52, October 1955.
- [19] Ferguson P.M., Breen J.E.: "Lapped Splices for High Strength Reinforcing Bars", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 62, September 1965.
- [20] Chamberlin S.J.: "Spacing of Spliced Bars in Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 54, February 1958.
- [21] Ferguson P.M., Briceno E.A.: "Tensile Lap Splices - Part 1: Retaining Wall Type, Varying Moment Zone", Research Report 113-2, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, July 1969.
- [22] Ferguson P.M., Krishnaswamy C.N.: "Tensile Lap Splices - Part 2: Design Recommendations for Retaining Wall Splices and Large Bar Splices", Research Report 113-3, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, April 1971.
- [23] Thompson M.A., Jirsa J.O., Breen J.E., Meinheit D.F.: "The Behavior of Multiple Lap Splices in Wide Sections", Research Report 154-1, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, February 1975.
- [24] Tepfers R.: "A Theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for Deformed Bars", Publication 73.2, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- [25] Rathkjen A.: "Forankringsstyrke af armeringsjern ved bjaekeunderstøtninger", Rapport 7203, DIAB Aalborg, Ren & Anvendt Mekanik, 1972.
- [26] Hess U.: "The Anchorage of Reinforced Bars at Supports", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Schlussbericht Colloquium Kopenhagen, 309-316, Zürich, 1979.
- [27] Stucki D., Thürlimann B.: "Eckbereiche von Rahmen und Wänden", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht (in Vorbereitung).

# ANHANG

Erforderlicher Querbewehrungsgehalt als Funktion der Verformung bei Druckscheiben (s. Abschnitt 4.3.2)

